

Intitulé du Module : Analyse de données et estimation

Code Module : MAT4056

Date : 17/05/2011

Professeur : Myriam Maumy-Bertrand

Durée : 1h30

Nombre de pages :

Examen :

Contrôle:

Classe : P094INF1, P094INF2

Documents autorisés : Oui

Non

Calculatrice autorisée : Oui

Non

Ordinateur portable autorisé : Oui

Non

Précision sur le barème si QCM :

Commentaires :

Nom & Prénom de l'étudiant :

Code étudiant :

Classe :

Sujet numéro 1

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Il vous est demandé de ne traiter que deux exercices parmi les trois. La rédaction de trois exercices entraîne automatiquement un rejet de correction.

- Les calculatrices sont autorisées.
- Le cours, les exercices de travaux dirigés, leurs corrigés ainsi que les notes de cours sont autorisés. Tout autre document est interdit
- Afin de pouvoir traiter les questions, plusieurs résultats numériques et graphiques ont été intégrés au document.
- Vous prendrez un soin particulier à préciser quelles sont les hypothèses testées.
- Tous les tests seront effectués au seuil de signification $\alpha = 5\%$.
- Des tables de Student, du χ^2 et de Fisher sont données en annexe du sujet.

Exercice 1. Cholestérol. Cet exercice comporte cinq questions.

Une équipe de recherche, en France, s'intéresse à la possible liaison entre la teneur en cholestérol dans le sang, exprimée en g/L et l'âge. Pour cela, l'équipe a relevé sur un échantillon de 30 femmes la teneur en cholestérol dans le sang et l'âge de la femme. Les données sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Âge	Cholestérol	Âge	Cholestérol	Âge	Cholestérol
46	181	58	189	56	197
52	228	18	137	19	189
39	182	44	173	42	214
65	249	33	177	30	140
54	259	78	241	47	196
33	201	51	225	58	262
49	151	43	223	70	261
76	239	44	190	67	256
71	224	58	257	31	159
41	162	63	237	21	191

1. D'après les sorties statistiques réalisées avec le logiciel R qui se trouvent après (page 5), donner une estimation du coefficient de corrélation entre la teneur en cholestérol dans le sang et l'âge de la femme. Commenter cette valeur.
2. Proposer un modèle statistique qui permet d'étudier une relation (préciser le type de relation) entre la teneur en cholestérol dans le sang et l'âge de la femme. Préciser la nature de chacune des variables présentes dans le modèle statistique proposé.
3. D'après les sorties statistiques réalisées avec le logiciel R qui se trouvent après (page 5), pouvez-vous conclure à une éventuelle significativité de l'âge de la femme sur la teneur en cholestérol dans le sang ? Si oui, avec quel test pouvez-vous conclure ? Citer le nom du test, les hypothèses et la statistique du test et les conditions nécessaires pour réaliser ce test.

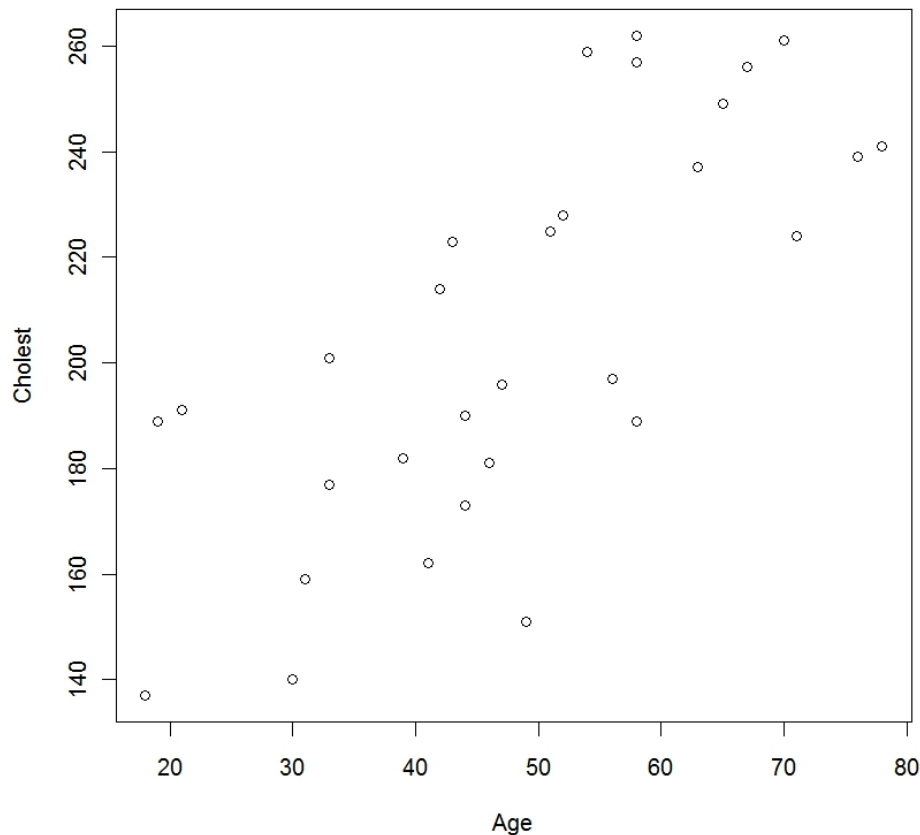


FIGURE 1. Représentation graphique du cholestérol en fonction de l'âge

4. Que valent les estimations des coefficients β_0 (constante dans le modèle) et β_1 (coefficient de l'âge dans le modèle)? Interpréter ces coefficients et tester-les.
5. Que proposeriez-vous à l'équipe de recherche à l'issue de cette première étude?

```
> str(exo1)
'data.frame': 30 obs. of 2 variables:
 $ Age : int 46 52 39 65 54 33 49 76 71 41 ...
 $ Cholest: int 181 228 182 249 259 201 121 339 224 112 ...
> plot(exo1)
> modele1<-lm(Cholest~Age,data=exo1)
> summary(modele1)
```

```
Call:
lm(formula = Cholest ~ Age, data = exo1)
```

```
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
     4
```

-56.065 -19.591 -5.367 18.701 43.491

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	124.3189	15.2562	8.149	7.17e-09 ***
Age	1.6887	0.2982	5.663	4.56e-06 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 26.25 on 28 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5338, Adjusted R-squared: 0.5172

F-statistic: 32.06 on 1 and 28 DF, p-value: 4.555e-06

> anova(modele1)

Analysis of Variance Table

Response: Cholest

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Age	1	22099	22098.9	32.064	4.555e-06 ***
Residuals	28	19298	689.2		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

> residus<-residuals(modele1)

> shapiro.test(residus)

Shapiro-Wilk normality test

data: residus

W = 0.9605, p-value = 0.3197

Exercice 2. Traitement contre l'urée. Cet exercice comporte six questions.

Cinq centres hospitaliers utilisent un traitement différent pour combattre le taux élevé d'urée dans le sang chez les malades atteints de lésions rénales. Le caractère étudié est $Y = \text{taux d'urée}$ (en décigrammes par litre de sang) après traitement. Dans chaque centre hospitalier, on l'a mesuré chez sept patients.

traitement 1	traitement 2	traitement 3	traitement 4	traitement 5
4,5	7,5	8,0	2,0	6,5
2,5	3,0	6,5	7,5	5,5
6,0	2,5	6,0	4,0	6,0
4,5	4,0	3,5	2,5	4,5
3,0	2,0	5,0	5,0	4,0
5,5	4,0	7,0	3,5	7,0
3,5	5,5	5,0	6,5	5,5

1. Proposer un modèle statistique qui permet d'étudier une relation (préciser le type de relation) entre le taux d'urée dans le sang et le traitement. Préciser la nature de chacune des variables présentes dans le modèle statistique proposé.
2. Les conditions d'application du modèle linéaire sont-elles vérifiées ? Si oui, expliquer votre réponse.
3. Donner le tableau de l'analyse de la variance.
4. D'après les sorties statistiques réalisées avec le logiciel R qui se trouvent ci-dessous, pouvez-vous conclure à une éventuelle significativité du traitement sur le taux d'urée dans le sang ? Pour répondre à cette question, utiliser un test. Vous citerez le nom du test, les hypothèses, la statistique du test et donnerez la conclusion du test (vous préciserez quelle règle vous utilisez).
5. Pouvez-vous séparer les traitements en groupes ne présentant pas de différence significative au seuil de 5% ? Si oui, expliquer comment vous procédez.
6. Dans le cas où vous avez répondu dans l'affirmative à la question précédente, faire cette répartition en groupes homogènes, en indiquant les traitements et les moyennes correspondantes du taux d'urée dans le sang.

```
> traitement<-rep(1:5,c(7,7,7,7,7))
> taux<-c(4.5,2.5,6,4.5,3,5.5,3.5,7.5,3,2.5,4,2,4,5.5,8,6.5,6,3.5,5,
7,5,2,7.5,4,2.5,5,3.5,6.5,6.5,5.5,6,4.5,4,7,5.5)
> traitement<-factor(traitement)
> exo2<data.frame(traitement,taux)
> str(exo2)
'data.frame':  35 obs. of  2 variables:
 $ traitement: Factor w/ 5 levels "1","2","3","4",...: 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 ...
 $ taux      : num  4.5 2.5 6 4.5 3 5.5 3.5 7.5 3 2.5 ...
> mean<-tapply(exo2$taux,exo2$traitement,mean)
> mean
      1      2      3      4      5
      6
```

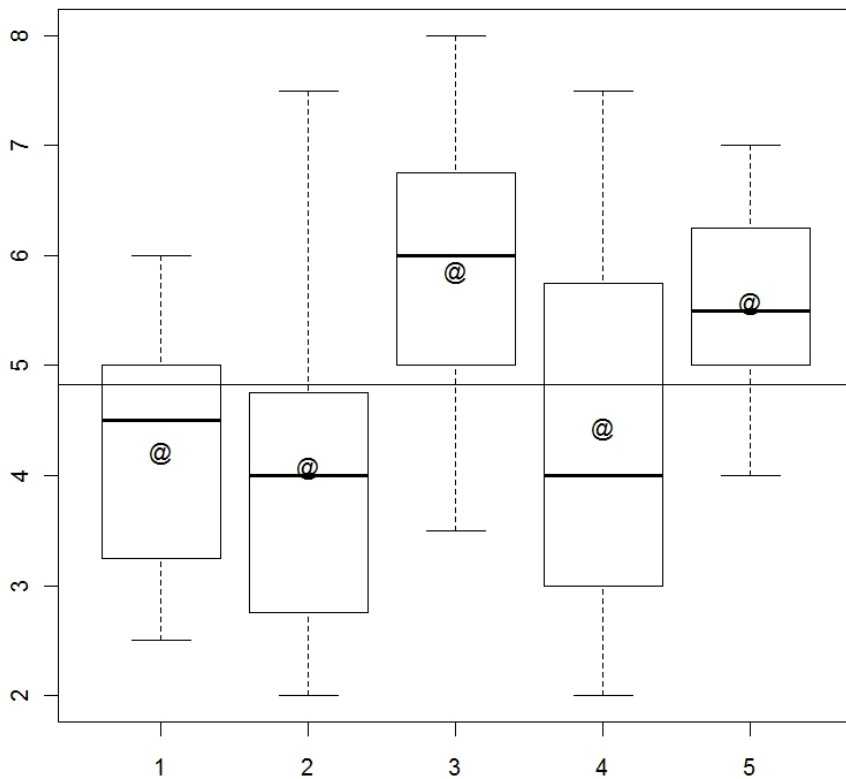


FIGURE 2. Représentation graphique du cholestérol en fonction de l'âge

4.214286 4.071429 5.857143 4.428571 5.571429

```
> var
      1      2      3      4      5
1.654762 3.619048 2.226190 4.119048 1.119048
```

```
> modele2<-aov(taux~traitement,data=exo2)
> modele2
Call:
aov(formula = taux ~ traitement, data = exo2)
```

```
Terms:
          traitement Residuals
Sum of Squares    19.04286  76.42857
Deg. of Freedom         4        30
```

Residual standard error: 1.596126
 Estimated effects may be unbalanced

```
> options(contrasts=c("contr.sum","contr.poly"))
> modele3<-lm(taux~traitement,data=exo2)
> summary(modele3)
```

Call:

```
lm(formula = taux ~ traitement, data = exo2)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-2.42857	-1.07143	-0.07143	1.03571	3.42857

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	4.8286	0.2698	17.897	<2e-16 ***
traitement1	-0.6143	0.5396	-1.138	0.2639
traitement2	-0.7571	0.5396	-1.403	0.1708
traitement3	1.0286	0.5396	1.906	0.0662 .
traitement4	-0.4000	0.5396	-0.741	0.4643

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.596 on 30 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.1995, Adjusted R-squared: 0.09272

F-statistic: 1.869 on 4 and 30 DF, p-value: 0.1419

```
> TukeyHSD(modele2)
```

```
Tukey multiple comparisons of means
 95% family-wise confidence level
```

```
Fit: aov(formula = taux ~ traitement, data = exo2)
```

```
$traitement
```

	diff	lwr	upr	p adj
2-1	-0.1428571	-2.6175554	2.331841	0.9998128
3-1	1.6428571	-0.8318411	4.117555	0.3262525
4-1	0.2142857	-2.2604125	2.688984	0.9990697
5-1	1.3571429	-1.1175554	3.831841	0.5145534
3-2	1.7857143	-0.6889839	4.260413	0.2493343
4-2	0.3571429	-2.1175554	2.831841	0.9932296
5-2	1.5000000	-0.9746982	3.974698	0.4156363
4-3	-1.4285714	-3.9032696	1.046127	0.4641681
5-3	-0.2857143	-2.7604125	2.188984	0.9971344
5-4	1.1428571	-1.3318411	3.617555	0.6693955

```
> residus<-residuals(modele2)
```

```
> shapiro.test(residus)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residus  
W = 0.9744, p-value = 0.5734  
> bartlett.test(residus~traitement)
```

Bartlett test of homogeneity of variances

```
data: residus by traitement  
Bartlett's K-squared = 3.1361, df = 4, p-value = 0.5353
```


Exercice 3. : Ventres semestrielles.

On cherche à étudier l'influence du marché total de la branche (MT), des remises aux grossistes (RG), des prix (PRIX), du budget de recherche (BR), des investissements (INV), de la publicité (PUB), des frais de ventes (FV) et du total du budget publicité de la branche (TPUB) sur les ventes semestrielles. Dans cette étude, les ventes semestrielles représentent la variable à expliquer et on désigne par MT, RG, PRIX, BR, INV, PUB et FV les variables explicatives. Toutes ces variables sont exprimées en K€. Les données concernant ces variables, pour 38 semestres, sont reportées dans le tableau présenté ci-dessous.

Semestre	MT	RG	PRIX	BR	INV	PUB	FV	TPUB	VENTES
1	398	138	56	12	50	77	229	98	5540
2	369	118	59	9	17	89	177	225	5439
3	268	129	57	29	89	51	166	263	4290
4	484	111	58	13	107	40	258	321	5502
5	394	146	59	13	143	52	209	407	4872
6	332	140	60	11	61	21	180	247	4708
7	336	136	60	25	-30	40	213	328	4627
8	383	104	60	21	-45	32	201	298	4110
9	285	105	63	8	-28	12	176	218	4123
10	277	135	62	11	76	68	175	410	4842
11	456	128	65	22	144	52	253	93	5741
12	355	131	65	24	113	77	208	307	5094
13	364	120	64	14	128	96	195	107	5383
14	320	147	66	15	10	48	154	305	4888
15	311	143	67	22	-25	27	181	60	4033
16	362	145	67	23	117	73	220	239	4942
17	408	131	66	13	120	62	235	141	5313
18	433	124	68	8	122	25	258	291	5014
19	359	106	69	27	71	74	196	414	5397
20	476	138	71	18	4	63	279	206	5149
21	415	148	69	8	47	29	207	80	5151
22	420	136	70	10	8	91	213	429	4989
23	536	111	73	27	128	74	296	273	5927
24	432	152	73	16	-50	16	245	309	4704
25	436	123	73	32	100	43	276	280	5366
26	415	119	75	20	-40	41	211	315	4630
27	462	112	73	15	68	93	283	212	5712
28	429	125	74	11	88	83	218	118	5095
29	517	142	74	27	27	75	307	345	6124
30	328	123	77	20	59	88	211	141	4787
31	418	135	79	35	142	74	270	83	5036
32	515	120	77	23	126	21	328	398	5288
33	412	149	78	36	30	26	258	124	4647

Semestre	MT	RG	RIX	BR	INV	PUB	FV	TPUB	VENTES
34	455	126	78	22	18	95	233	118	5316
35	554	138	81	20	42	93	324	161	6180
36	441	120	80	16	-22	50	267	405	4801
37	417	120	81	35	148	83	257	111	5512
38	461	132	82	27	-18	91	267	170	5272

1. Écrire le modèle de régression permettant d'expliquer les ventes à l'aide de toutes les variables explicatives proposées. Préciser la nature de chacune des variables présentes dans le modèle ainsi que les hypothèses du modèle. Ces hypothèses sont-elles vérifiées ?
2. D'après les sorties statistiques réalisées avec le logiciel R qui se trouvent après, donner les estimations de tous les paramètres du modèle. Tester-les. Donner un intervalle de confiance à 95 % pour les paramètres du modèle.
3. En utilisant les résultats ci-après, donner le tableau de l'analyse de variance.
4. Ce modèle est-il intéressant ? Quelles sont les variables explicatives qui influent significativement sur le volume des ventes ? Est-il pertinent de simplifier le modèle introduit en 1. ?
5. Dans cette question, on suppose que MT=500, RG=100, PRIX=83, BR=30, INV=50, PUB=90, FV= 300 et TPUB=200. Déterminer la valeur des ventes prédite par le modèle ? À l'aide des résultats ci-dessous, donner un intervalle de prédiction à 95 % pour cette valeur.

```
> str(exo3)
'data.frame':  38 obs. of  9 variables:
 $ MT      : int  398 369 268 484 394 332 336 383 285 277 ...
 $ RG      : int  138 118 129 111 146 140 136 104 105 135 ...
 $ PRIX    : int  56 59 57 58 59 60 60 60 63 62 ...
 $ BR      : int  12 9 29 13 13 11 25 21 8 11 ...
 $ INV     : int  50 17 89 107 143 61 -30 -45 -28 76 ...
 $ PUB     : int  77 89 51 40 52 21 40 32 12 68 ...
 $ FV      : int  229 177 166 258 209 180 213 201 176 175 ...
 $ TPUB    : int  98 225 263 321 407 247 328 298 218 410 ...
 $ VENTES : int  5540 5439 4290 5502 4872 4708 4627 4110 4123 4842 ...
```

```
> modele4<-lm(VENTES~MT+RG+RIX+BR+INV+PUB+FV+TPUB,data=exo3)
> summary(modele4)
```

Call:

```
lm(formula = VENTES ~ MT + RG + PRIX + BR + INV + PUB + FV +
    TPUB, data = exo3)
```

Residuals:

```
Min      1Q  Median      3Q      Max
```

-492.54 -109.80 -18.10 172.86 468.52

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	3124.92373	643.10176	4.859	3.75e-05	***
MT	4.50675	1.59254	2.830	0.00837	**
RG	1.78469	3.30031	0.541	0.59280	
PRIX	-14.03885	8.32744	-1.686	0.10256	
BR	-2.35462	6.58730	-0.357	0.72334	
INV	1.83264	0.77987	2.350	0.02579	*
PUB	8.76775	1.83146	4.787	4.58e-05	***
FV	1.33194	2.77815	0.479	0.63523	
TPUB	-0.02725	0.40168	-0.068	0.94637	

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 257 on 29 degrees of freedom
 Multiple R-squared: 0.8048, Adjusted R-squared: 0.751
 F-statistic: 14.95 on 8 and 29 DF, p-value: 2.097e-08

```
> residus<-residuals(modele4)
> shapiro.test(residus)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residus
W = 0.988, p-value = 0.9504
```

```
> anova(modele4)
Analysis of Variance Table
```

```
Response: VENTES
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
MT	1	5060415	5060415	76.6242	1.235e-09	***
RG	1	9582	9582	0.1451	0.7060505	
PRIX	1	153786	153786	2.3286	0.1378491	
BR	1	12601	12601	0.1908	0.6654836	
INV	1	1067509	1067509	16.1641	0.0003784	***
PUB	1	1578406	1578406	23.9000	3.456e-05	***
FV	1	14899	14899	0.2256	0.6383672	
TPUB	1	304	304	0.0046	0.9463728	
Residuals	29	1915218	66042			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```
> confint(modele4)
                2.5 %          97.5 %
                -----
                12
```

```
(Intercept) 1809.6329471 4440.2145165
MT           1.2496330    7.7638712
RG          -4.9652067    8.5345962
PRIX       -31.0703695    2.9926715
BR         -15.8271668   11.1179177
INV         0.2376256    3.4276593
PUB         5.0219839   12.5135067
FV         -4.3500188    7.0138995
TPUB       -0.8487831    0.7942771
```

```
> predict(modele4,data.frame(MT=500, RG=100, PRIX=83, BR=30, INV=50,
PUB=90, FV= 300, TPUB=200),interval="prediction")
```

```
      fit      lwr      upr
1 5595.767 5001.003 6190.53
```

```
> predict(modele4,data.frame(MT=500, RG=100, PRIX=83, BR=30, INV=50,
PUB=90, FV= 300, TPUB=200),interval="confidence")
```

```
      fit      lwr      upr
1 5595.767 5317.393 5874.141
```

Table de la loi de Student

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500

Table de la loi du χ^2 , régions unilatérales

α	0.01	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
1	0.0002	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	6.6349
2	0.0201	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	9.2103
3	0.1148	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	11.3449
4	0.2971	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	13.2767
5	0.5543	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	15.0863
6	0.8721	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	16.8119
7	1.2390	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	18.4753
8	1.6465	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	20.0902
9	2.0879	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	21.6660
10	2.5582	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	23.2093
11	3.0535	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	24.7250
12	3.5706	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	26.2170
13	4.1069	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	27.6882
14	4.6604	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	29.1412
15	5.2293	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	30.5779
16	5.8122	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	31.9999
17	6.4078	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	33.4087
18	7.0149	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	34.8053
19	7.6327	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	36.1909
20	8.2604	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	37.5662
21	8.8972	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	38.9322
22	9.5425	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	40.2894
23	10.1957	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	41.6384
24	10.8564	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	42.9798
25	11.5240	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	44.3141
26	12.1981	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	45.6417
27	12.8785	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	46.9629
28	13.5647	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	48.2782
29	14.2565	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	49.5879
30	14.9535	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	50.8922

Table de la loi de Fisher-Snedecor, $\alpha = 5\%$

num	den 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4476	18.5128	10.1280	7.7086	6.6079	5.9874	5.5914	5.3177	5.1174	4.9646
2	199.5000	19.0000	9.5521	6.9443	5.7861	5.1433	4.7374	4.4590	4.2565	4.1028
3	215.7073	19.1643	9.2766	6.5914	5.4095	4.7571	4.3468	4.0662	3.8625	3.7083
4	224.5832	19.2468	9.1172	6.3882	5.1922	4.5337	4.1203	3.8379	3.6331	3.4780
5	230.1619	19.2964	9.0135	6.2561	5.0503	4.3874	3.9715	3.6875	3.4817	3.3258
6	233.9860	19.3295	8.9406	6.1631	4.9503	4.2839	3.8660	3.5806	3.3738	3.2172
7	236.7684	19.3532	8.8867	6.0942	4.8759	4.2067	3.7870	3.5005	3.2927	3.1355
8	238.8827	19.3710	8.8452	6.0410	4.8183	4.1468	3.7257	3.4381	3.2296	3.0717
9	240.5433	19.3848	8.8123	5.9988	4.7725	4.0990	3.6767	3.3881	3.1789	3.0204
10	241.8817	19.3959	8.7855	5.9644	4.7351	4.0600	3.6365	3.3472	3.1373	2.9782
11	242.9835	19.4050	8.7633	5.9358	4.7040	4.0274	3.6030	3.3130	3.1025	2.9430
12	243.9060	19.4125	8.7446	5.9117	4.6777	3.9999	3.5747	3.2839	3.0729	2.9130
13	244.6898	19.4189	8.7287	5.8911	4.6552	3.9764	3.5503	3.2590	3.0475	2.8872
14	245.3640	19.4244	8.7149	5.8733	4.6358	3.9559	3.5292	3.2374	3.0255	2.8647
15	245.9499	19.4291	8.7029	5.8578	4.6188	3.9381	3.5107	3.2184	3.0061	2.8450
16	246.4639	19.4333	8.6923	5.8441	4.6038	3.9223	3.4944	3.2016	2.9890	2.8276
17	246.9184	19.4370	8.6829	5.8320	4.5904	3.9083	3.4799	3.1867	2.9737	2.8120
18	247.3232	19.4402	8.6745	5.8211	4.5785	3.8957	3.4669	3.1733	2.9600	2.7980
19	247.6861	19.4431	8.6670	5.8114	4.5678	3.8844	3.4551	3.1613	2.9477	2.7854
20	248.0131	19.4458	8.6602	5.8025	4.5581	3.8742	3.4445	3.1503	2.9365	2.7740
21	248.3094	19.4481	8.6540	5.7945	4.5493	3.8649	3.4349	3.1404	2.9263	2.7636
22	248.5791	19.4503	8.6484	5.7872	4.5413	3.8564	3.4260	3.1313	2.9169	2.7541
23	248.8256	19.4523	8.6432	5.7805	4.5339	3.8486	3.4179	3.1229	2.9084	2.7453
24	249.0518	19.4541	8.6385	5.7744	4.5272	3.8415	3.4105	3.1152	2.9005	2.7372
25	249.2601	19.4558	8.6341	5.7687	4.5209	3.8348	3.4036	3.1081	2.8932	2.7298
26	249.4525	19.4573	8.6301	5.7635	4.5151	3.8287	3.3972	3.1015	2.8864	2.7229
27	249.6309	19.4587	8.6263	5.7586	4.5097	3.8230	3.3913	3.0954	2.8801	2.7164
28	249.7966	19.4600	8.6229	5.7541	4.5047	3.8177	3.3858	3.0897	2.8743	2.7104
29	249.9510	19.4613	8.6196	5.7498	4.5001	3.8128	3.3806	3.0844	2.8688	2.7048
30	250.0951	19.4624	8.6166	5.7459	4.4957	3.8082	3.3758	3.0794	2.8637	2.6996
num	den 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4.8443	4.7472	4.6672	4.6001	4.5431	4.4940	4.4513	4.4139	4.3807	4.3512
2	3.9823	3.8853	3.8056	3.7389	3.6823	3.6337	3.5915	3.5546	3.5219	3.4928
3	3.5874	3.4903	3.4105	3.3439	3.2874	3.2389	3.1968	3.1599	3.1274	3.0984
4	3.3567	3.2592	3.1791	3.1122	3.0556	3.0069	2.9647	2.9277	2.8951	2.8661
5	3.2039	3.1059	3.0254	2.9582	2.9013	2.8524	2.8100	2.7729	2.7401	2.7109
6	3.0946	2.9961	2.9153	2.8477	2.7905	2.7413	2.6987	2.6613	2.6283	2.5990
7	3.0123	2.9134	2.8321	2.7642	2.7066	2.6572	2.6143	2.5767	2.5435	2.5140
8	2.9480	2.8486	2.7669	2.6987	2.6408	2.5911	2.5480	2.5102	2.4768	2.4471
9	2.8962	2.7964	2.7144	2.6458	2.5876	2.5377	2.4943	2.4563	2.4227	2.3928
10	2.8536	2.7534	2.6710	2.6022	2.5437	2.4935	2.4499	2.4117	2.3779	2.3479
11	2.8179	2.7173	2.6347	2.5655	2.5068	2.4564	2.4126	2.3742	2.3402	2.3100
12	2.7876	2.6866	2.6037	2.5342	2.4753	2.4247	2.3807	2.3421	2.3080	2.2776
13	2.7614	2.6602	2.5769	2.5073	2.4481	2.3973	2.3531	2.3143	2.2800	2.2495
14	2.7386	2.6371	2.5536	2.4837	2.4244	2.3733	2.3290	2.2900	2.2556	2.2250
15	2.7186	2.6169	2.5331	2.4630	2.4034	2.3522	2.3077	2.2686	2.2341	2.2033
16	2.7009	2.5989	2.5149	2.4446	2.3849	2.3335	2.2888	2.2496	2.2149	2.1840
17	2.6851	2.5828	2.4987	2.4282	2.3683	2.3167	2.2719	2.2325	2.1977	2.1667
18	2.6709	2.5684	2.4841	2.4134	2.3533	2.3016	2.2567	2.2172	2.1823	2.1511
19	2.6581	2.5554	2.4709	2.4000	2.3398	2.2880	2.2429	2.2033	2.1683	2.1370
20	2.6464	2.5436	2.4589	2.3879	2.3275	2.2756	2.2304	2.1906	2.1555	2.1242
21	2.6358	2.5328	2.4479	2.3768	2.3163	2.2642	2.2189	2.1791	2.1438	2.1124
22	2.6261	2.5229	2.4379	2.3667	2.3060	2.2538	2.2084	2.1685	2.1331	2.1016
23	2.6172	2.5139	2.4287	2.3573	2.2966	2.2443	2.1987	2.1587	2.1233	2.0917
24	2.6090	2.5055	2.4202	2.3487	2.2878	2.2354	2.1898	2.1497	2.1141	2.0825
25	2.6014	2.4977	2.4123	2.3407	2.2797	2.2272	2.1815	2.1413	2.1057	2.0739
26	2.5943	2.4905	2.4050	2.3333	2.2722	2.2196	2.1738	2.1335	2.0978	2.0660
27	2.5877	2.4838	2.3982	2.3264	2.2652	2.2125	2.1666	2.1262	2.0905	2.0586
28	2.5816	2.4776	2.3918	2.3199	2.2587	2.2059	2.1599	2.1195	2.0836	2.0517
29	2.5759	2.4718	2.3859	2.3139	2.2525	2.1997	2.1536	2.1131	2.0772	2.0452
30	2.5705	2.4663	2.3803	2.3082	2.2468	2.1938	2.1477	2.1071	2.0712	2.0391