

T. D. n° 12

Analyse de variance à deux facteurs

Ces deux exercices sont issus du livre de Yadolah Dodge intitulé *Analyse de régression appliquée, éditions Dunod*.

L'exercice qui va suivre porte sur l'analyse de la variance à un facteur.

Exercice 1. Graisse absorbée et quatre type de graisse

Pendant la cuisson les croissants absorbent la graisse en quantité variable. Nous cherchons à savoir si la quantité de graisse absorbée dépend du type de graisse. Certaines des mesures sont présentées dans le tableau suivant pour quatre types de graisse.

Graisse				
	1	2	3	4
	64	78	75	55
	72	91	93	66
	68	97	78	49
	77	82	71	64
	56	85	63	70
	95	77	76	68

1. Calculer la moyenne générale $\hat{\mu}$ et la moyenne pour chaque groupe $\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i$.
2. Calculer le tableau d'analyse de la variance.
3. Tester l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 : \text{les valeurs des } \alpha_i \text{ ne sont pas toutes égales.}$$

Exercice 2. Quatre modèles de machines à écrire

Une entreprise cherche à tester quatre modèles de machines à écrire. Pour faire ce test, elle demande à cinq secrétaires professionnelles de taper un texte pendant cinq minutes. À la fin du test, nous comptons le nombre moyen de mots tapés en une minute. Nous répétons l'expérience le lendemain.

Les résultats (nombre moyen de mots par minute) sont présentés dans le tableau au verso.

Machines à écrire	Secrétaires				
	1	2	3	4	5
1	33	31	34	34	31
	36	31	36	33	31
2	32	37	39	33	35
	35	35	36	36	36
3	37	35	34	31	37
	39	35	37	35	39
4	29	31	33	31	33
	31	33	34	27	33

Soit le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

avec $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ et $k = 1, 2$ et où α correspond à l'influence de la machine à écrire, β l'influence de la secrétaire et $\alpha\beta$ l'interaction entre la machine i et la secrétaire j .

1. Nous considérons la forme matricielle du modèle :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{x}\beta + \epsilon.$$

Écrire le vecteur \mathbf{Y} et la matrice \mathbf{x} en tenant compte des contraintes habituelles pour que la matrice soit inversible.

2. Tester les trois hypothèses nulles suivantes :

- (i) Que cherchons-nous à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \text{les valeurs des } \alpha_i \text{ ne sont pas toutes égales, } i = 1, 2, 3, 4.$$

- (ii) Que cherchons-nous à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \text{les valeurs des } \beta_j \text{ ne sont pas toutes égales, } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

- (iii) Que cherchons-nous à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{15} = (\alpha\beta)_{21} = \dots = (\alpha\beta)_{45}$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \text{les valeurs des } (\alpha\beta)_{ij} \text{ ne sont pas toutes égales, } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Cet exercice est issu du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès intitulé Statistiques générales pour utilisateurs, éditions PUR.

Exercice 3. Comparaison de l'acidité de trois cafés

Trois cafés ont été dégustés par six juges. Le tableau ci-dessous récapitule les notes d'acidité accordées par les juges aux différents cafés.

	Café 1	Café 2	Café 3
Juge 1	0	3	4
Juge 2	2	3	6
Juge 3	3	5	7
Juge 4	3	6	7
Juge 5	5	6	8
Juge 6	6	8	10

Ce tableau présente les notes d'évaluation de l'acidité des trois cafés. Les notes sont attribuées sur la base d'une échelle variant de 0 (café très peu acide) à 10 (café très acide).

Certains cafés sont-ils, en moyenne, perçus plus acides que d'autres? Dans cette perspective, nous réalisons dans un premier temps une analyse de variance à un facteur : le facteur café (à trois modalités).

1. Établir le tableau d'analyse de variance. Écrire le modèle associé à cette analyse.
2. Tester l'hypothèse selon laquelle les trois cafés présentent une acidité identique. Donner vos conclusions, au risque de 5% (resp. 1%).

Nous décidons d'intégrer au modèle précédent l'influence du juge sur la note d'acidité.

3. Faire une régression multiple sur les données. Donner ensuite le tableau d'analyse de la variance à deux facteurs en justifiant brièvement vos réponses.
4. Quelle interprétation concrète donner à l'effet juge? Est-il intéressant, lorsque nous nous intéressons uniquement à l'effet café, de prendre en compte l'effet juge dans le modèle d'analyse de la variance?
5. Écrire le modèle d'analyse de la variance. Conclure sur les effets des facteurs café et juge.
6. Commenter les façons de noter des juges 1 et 3. Quel café achèteriez-vous si vous préférez les cafés peu acides? Justifier.