

T. D. n° 3

Plans factoriels complets et fractionnaires pour des facteurs ayant deux modalités

Ces exercices sont issus du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès intitulé *Statistiques générales pour utilisateurs*, éditions PUR.

Exercice 1. Construction d'un plan complet 2^3

On étudie l'influence de trois facteurs A , B et C à deux modalités, notées 1 et 2, sur une variable réponse Y . Pour cela on réalise un plan complet. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

Essai	A	B	C	Y
1	1	1	1	38
2	1	1	2	30
3	1	2	1	26
4	1	2	2	19
5	2	1	1	37
6	2	1	2	28
7	2	2	1	24
8	2	2	2	16

1. Proposer un modèle pour étudier ces données.
2. Donner la matrice des effets associée à votre modèle. Estimer les paramètres de ce modèle.
3. On néglige maintenant toutes les interactions. Ecrire le nouveau modèle. Quelles est la matrice des effets associée à ce modèle? Quel lien y-a-t'il entre les estimations des paramètres de ce nouveau modèle et celles du modèle précédent?
4. Estimer la variance résiduelle.
5. Tester la significativité de chacun des coefficients.

Exercice 2. Plans $L_8 2^3 4$ et $L_8 2^4 4$

On étudie un processus au travers d'une variable réponse Y . A priori, 4 facteurs influent sur Y :

- 3 facteurs ($F1$, $F2$ et $F3$) à deux modalités chacun ;
- 1 facteur ($F4$) à 4 modalités.

On néglige a priori toutes les interactions.

On cherche à construire un plan en 8 essais permettant d'étudier simultanément ces 4 facteurs. Pour que ces 4 facteurs soient orthogonaux, on se fonde sur la matrice des effets (du modèle complet) du plan combinant $F1$, $F2$ et $F3$. On sait que deux colonnes de cette matrice définissent un facteur à 4 modalités (par exemple en notant : $-- = 1$; $-+ = 2$; $+ - = 3$ et $++ = 4$).

1. À partir de ce principe, construire un plan tel que les effets principaux des 4 facteurs $F1$, $F2$, $F3$ et $F4$ sont orthogonaux.
2. Ce plan est noté $L_8 2^3 4$ car il a 8 essais, 3 facteurs à deux niveaux et un facteur à 4 niveaux. Le plan $L_8 2^4$ existe-t-il ? Si oui, comment le construire ?

Exercice 3. Deux plans $2^3 4$ en concurrence

On étudie l'influence sur une réponse Y de 4 facteurs qualitatifs, dont les 3 premiers sont à 2 modalités (notées 1 et 2) et le quatrième à 4 modalités (notées $F1$, $F2$, $F3$ et $F4$). Toutes les interactions sont supposées a priori négligeables. On ne peut réaliser que 8 essais. Deux collègues, A et B, vous proposent chacun un plan, voir le Tableau 1.

Choisir un modèle d'analyse en faisant apparaître les degrés de liberté mis en jeu.

Plan du collègue A				Plan du collègue B			
F1	F2	F3	F4	F1	F2	F3	F4
1	1	1	3	1	1	1	4
1	1	2	2	1	1	2	3
1	2	1	4	1	2	1	2
1	2	2	1	1	2	2	1
2	1	1	2	2	1	1	1
2	1	2	3	2	1	2	2
2	2	1	1	2	2	1	3
2	2	2	4	2	2	2	4

TABLE 1 – Deux plans $2^3 4$

Choisir, en le justifiant, l'un des deux plans.

Exercice 4. Dépouillement d'un plan 2^{5-2}

1. Combien d'essais sont nécessaires pour construire un plan complet à 5 facteurs ?
2. Construire le plan 2^{5-2} , qui permet d'étudier 5 facteurs qualitatifs à 2 niveaux en 9 essais (préciser les confusions puis la résolution de ce plan). Donner la matrice des essais.

3. Préciser les hypothèses nécessaires pour estimer sans ambiguïté la constante et les effets principaux.
4. Quelle méthode permettra d'exploiter les résultats de ce plan ?

Exercice 5. Plan 2^{6-2}

L'objectif de cet exercice est de construire un plan de résolution IV permettant d'étudier 6 facteurs à 2 niveaux en 16 essais.

1. Combien d'essais sont nécessaires pour construire un plan factoriel complet à six facteurs ?
2. Quel plan de base choisissez-vous pour étudier les six facteurs en seize essais ?

On se propose d'étudier le modèle saturé associé à ce plan. La matrice des effets contient les colonnes suivantes :

I	1	2	3	4	12	13	14	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
-----	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	------

3. Avec quels effets choisissez-vous de confondre les facteurs cinq et six ? Déduire toutes les autres confusions du plan. Quelle est la résolution de ce plan ?
4. Est-il possible d'estimer sans ambiguïté tous les effets principaux et toutes les interactions d'ordre deux ?
5. Combien devez-vous réaliser d'essais (au minimum) pour pouvoir estimer sans ambiguïté tous les facteurs principaux et toutes les interactions d'ordre deux ? Et quelles hypothèses devez-vous faire ?

Exercice 6. Construction d'un plan 2^{7-3}

L'objectif de cet exercice est de construire un plan permettant d'étudier l'influence de 7 facteurs à deux modalités en 16 essais.

1. Quel plan de base choisissez-vous ?
2. Monsieur X propose de confondre un des trois facteurs supplémentaires avec l'interaction d'ordre le plus élevé. Donner les générateurs d'alias puis préciser la résolution de ce plan.
3. Monsieur Y propose de confondre les trois facteurs supplémentaires avec des interactions d'ordre 3. Donner les générateurs d'alias puis préciser la résolution de ce plan.
4. Parmi les plans proposés, quel est le meilleur ? Pour le meilleur plan, indiquer les effets confondus avec l'interaction 12.
5. Quelle(s) hypothèse(s) doit-on faire pour estimer les effets principaux ?

Exercice 7. Choix entre deux plans

1. On vous propose deux plans d'expériences, lequel préférez-vous et pourquoi :

- A. Un plan de résolution III en 8 essais ;
 B. Un plan de résolution IV en 8 essais.
 2. On a calculé la matrice $(X'X)^{-1}$ pour deux plans d'expériences permettant d'étudier 3 facteurs et leurs interactions. Quel plan préférez-vous utiliser et pourquoi ?

$$A \begin{pmatrix} & I & F1 & F2 & F3 & F1F2 & F1F3 & F2F3 & F1F2F3 \\ I & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F1 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F2 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F3 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F1F2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ F1F3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\ F2F3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 & 0 \\ F1F2F3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} & I & F1 & F2 & F3 & F1F2 & F1F3 & F2F3 & F1F2F3 \\ I & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/24 & 0 \\ F1 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/24 \\ F2 & 0 & 0 & 1/12 & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F3 & 0 & 0 & -1/24 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F1F2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & -1/24 & 0 & 0 \\ F1F3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/24 & 1/12 & 0 & 0 \\ F2F3 & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 & 0 \\ F1F2F3 & 0 & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

3. On a calculé la matrice $(X'X)^{-1}$ pour deux plans d'expériences permettant d'étudier 7 facteurs. Quel plan préférez-vous utiliser et pourquoi ?

$$A \begin{pmatrix} & I & F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 & F7 \\ I & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F2 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F3 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ F5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ F6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ F7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} & I & F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 & F7 \\ I & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & -1/8 \\ F1 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F2 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F3 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ F5 & -1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/8 & 0 \\ F6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & -1/8 \\ F7 & -1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$