

Analyse de la variance à un facteur

Frédéric Bertrand¹

¹IRMA, Université de Strasbourg
Strasbourg, France

4ème année - ESIEA - 06-04-2010

Objectif

Dans ce chapitre, nous allons étudier un test statistique (nous renvoyons au cours sur les tests pour toutes les définitions sur ce sujet) permettant de comparer les moyennes de plusieurs variables aléatoires gaussiennes de même variance.

L'analyse de la variance est l'une des procédures les plus utilisées dans les applications de la statistique ainsi que dans les méthodes d'analyse de données comme le Data Mining qui est étudié en 5A.

Exemple : D'après le livre de Georges Parreins.

On veut tester 4 types de carburateurs. Pour chaque type, on dispose de 6 pièces que l'on monte successivement en parallèle sur 4 voitures que l'on suppose avoir des caractéristiques parfaitement identiques. Le tableau indique pour chaque essai la valeur d'un paramètre lié à la consommation :

<i>Essai / Carburateur</i>	A_1	A_2	A_3	A_4
1	21	23	18	20
2	24	23	19	21
3	25	32	28	25
4	20	23	19	15
5	34	32	24	29
6	17	15	14	9

Remarque

Cette écriture du tableau est dite « déempilée ». Nous pouvons l'écrire sous forme standard (« empilée »), c'est-à-dire avec deux colonnes, une pour le carburateur et une pour la consommation, et vingt-quatre lignes, une pour chaque unité observée.

Tableau empilé de l'exemple des carburateurs

	Carburateur	Consommation
1	Carburateur 1	21
2	Carburateur 1	24
3	Carburateur 1	25
4	Carburateur 1	20
5	Carburateur 1	34
6	Carburateur 1	17
7	Carburateur 2	23
8	Carburateur 2	23
9	Carburateur 2	32
10	Carburateur 2	23
11	Carburateur 2	32
12	Carburateur 2	15

Suite du tableau précédent

	Carburateur	Consommation
13	Carburateur 3	18
14	Carburateur 3	19
15	Carburateur 3	28
16	Carburateur 3	19
17	Carburateur 3	24
18	Carburateur 3	14
19	Carburateur 4	20
20	Carburateur 4	21
21	Carburateur 4	25
22	Carburateur 4	15
23	Carburateur 4	29
24	Carburateur 4	9

Remarque

Dans la plupart des logiciels, c'est sous cette forme que sont saisies et traitées les données. Dans les deux tableaux, nous avons omis les unités de la consommation et ceci pour abrégé l'écriture. Mais en principe cela doit être indiqué entre parenthèses à côté de la consommation.

Remarque

Il va de soi que lorsque vous rentrerez des données sous un logiciel, vous n'indiquerez pas le mot « Carburateur » à côté des nombres (1, 2, 3, 4). Il est juste là pour vous faciliter la compréhension du tableau.

Définitions

Sur **chaque unité**, nous observons **deux variables**.

1. Le carburateur qui est totalement contrôlé. La variable « Carburateur » est considérée comme qualitative avec quatre modalités bien déterminées. Nous l'appelons **le facteur (factor)**. Ici le facteur « Carburateur » est à **effets fixes (fixed effects)**.
2. La consommation qui est une mesure. Elle est parfois appelée **la réponse (response)**.

Notations

La variable mesurée dans un tel schéma expérimental sera notée Y .

Pour les observations nous utilisons deux indices :

- le premier indice indique le numéro de population (« Carburateur »),
- le second indice indique le numéro de l'observation dans l'échantillon.

Pour le premier indice, nous utilisons i (ou encore i' , i'' , i_1 , i_2).
Pour le second indice, nous utilisons j (ou encore j' , j'' , j_1 , j_2).

Notation

Ainsi les observations sont en général notées par :

$$y_{ij}, \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J(i).$$

Définition

Lorsque *les échantillons sont de même taille J* , nous disons que l'expérience est **équilibrée**.

Remarque

Si les tailles des échantillons sont différentes, alors elles sont notées par :

$$n_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Mais ce plan expérimental est à éviter parce que les différences qu'il est alors possible de détecter sont supérieures à celles du schéma équilibré.

Définitions

En se plaçant dans le **cas équilibré** nous notons les **moyennes (means)** de chaque échantillon par :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_{ij}, \quad i = 1, \dots, I,$$

et les **variances (variances)** de chaque échantillon par :

$$s_i^2(y) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad i = 1, \dots, I.$$

Remarque

Cette dernière formule exprime la variance non corrigée. Très souvent, dans les ouvrages ou les logiciels, c'est la variance corrigée qui est utilisée : au lieu d'être divisée par J , la somme est divisée par $J - 1$.

Retour à l'exemple

Après calculs avec le logiciel R , nous avons :

$$\bar{y}_1 = 23,50000 \quad \bar{y}_2 = 24,66667$$

$$\bar{y}_3 = 20,33333 \quad \bar{y}_4 = 19,83333$$

et

$$s_{1,c}(y) = 5,890671 \quad s_{2,c}(y) = 6,470446$$

$$s_{3,c}(y) = 4,926121 \quad s_{4,c}(y) = 7,111024.$$

Le nombre total d'observations est égal à :

$$n = IJ = 4 \times 6 = 24.$$

Conditions fondamentales de l'ANOVA

Nous supposons que les résidus $\{\hat{e}_{ij}\}$ sont des réalisations des variables erreurs $\{\varepsilon_{ij}\}$ qui satisfont aux 3 conditions suivantes :

1. Elles sont **indépendantes (independent)**.
2. Elles ont **même variance** σ^2 inconnue. C'est la condition d'**homogénéité (homogeneity)** ou d'**homoscédasticité (homoscedasticity)**.
3. Elles sont de **loi gaussienne (normal distribution)**.

Remarque

Par conséquent ces trois conditions se transfèrent sur les variables aléatoires $\{Y_{ij}\}$.

Nous pouvons donc écrire le modèle :

$$\mathcal{L}(Y_{ij}) = \mathcal{N}(\mu_i ; \sigma^2), \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

Ainsi nous constatons que, si les lois $\mathcal{L}(Y_{ij})$ sont différentes, elles ne peuvent différer que par leur moyenne théorique. Il y a donc un simple décalage entre elles.

Remarque

Parfois, le modèle statistique est écrit de la façon suivante :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

où

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\varepsilon_{ij}) = \mathcal{N}(0; \sigma^2), \quad i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, J.$$

Nous avons donc la correspondance suivante :

$$\mu_i = \mu + \alpha_i \quad i = 1, \dots, l.$$

Les deux modèles sont donc statistiquement équivalents.

Mise en place du Test de comparaison

Nous nous proposons de tester l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l$$

contre l'hypothèse alternative

(\mathcal{H}_1) : Les moyennes μ_i ne sont pas toutes égales.

La méthode statistique qui permet d'effectuer ce test est appelée **l'analyse de la variance à un facteur (one way analysis of variance)**.

Le test est fondé sur deux propriétés des moyennes et des variances.

Première propriété

La moyenne de toutes les observations est la moyenne des moyennes de chaque échantillon. Ceci s'écrit :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{y}_i.$$

Retour à l'exemple

Pour cet exemple, nous constatons cette propriété. En effet, nous avons avec le logiciel R :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{24} \times 530 \\ &= \frac{1}{4}(23,50 + 24,66667 + 20,33333 + 19,83333) \\ &= \frac{1}{4} \times 88,33333 \\ &= 22,08333,\end{aligned}$$

puisque $n = 24 = I \times J = 4 \times 6$.

Deuxième propriété

La variance de toutes les observations est la somme de la variance des moyennes et de la moyenne des variances. Ceci s'écrit :

$$s^2(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y})^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I s_i^2(y). \quad (1)$$

Retour à l'exemple

Un calcul « à la main » avec R donne :

$$s^2(y) = 35,78.$$

D'autre part, nous constatons que la variance des moyennes est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\bar{y}_i - \bar{y})^2 &= \frac{1}{4} \left((23,50 - 22,08)^2 + (24,67 - 22,08)^2 \right. \\ &\quad \left. + (20,33 - 22,08)^2 + (19,83 - 22,08)^2 \right) \\ &= 4,22. \end{aligned}$$

Suite de l'exemple

Nous constatons également que la moyenne des variances est égale à :

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I s_i^2(y) = \frac{1}{4}(28,91 + 34,88 + 20,25 + 42,13) = 31,56.$$

En faisant la somme des deux derniers résultats, nous retrouvons bien la valeur de 35,78 que nous avons obtenue par le calcul simple. Donc la relation (1) est bien vérifiée.

Résultat fondamental de l'ANOVA

En multipliant les deux membres par n de l'équation (1), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y})^2 = J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \right)$$

ou encore ce qui s'écrit :

$$SC_{Tot} = SC_F + SC_R. \quad (2)$$

Retour à l'exemple

Avec le logiciel R, nous avons d'une part

$$SC_{Tot} = 857,8333$$

et d'autre part

$$SC_F = 100,8333 \quad \text{et} \quad SC_R = 757,0000.$$

Donc lorsque nous faisons la somme des deux derniers résultats nous retrouvons bien la valeur du premier résultat. Donc la relation (2) est bien vérifiée.

Définition

Nous appelons **variation totale (total variation)** le terme :

$$SC_{Tot} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

Il indique la dispersion des données autour de la moyenne générale.

Définition

Nous appelons **variation due au facteur (variation between)** le terme :

$$SC_F = J \sum_{i=1}^I (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Il indique la dispersion des moyennes autour de la moyenne générale.

Définition

Nous appelons **variation résiduelle (variation within)** le terme :

$$SC_R = \sum_{i=1}^I \left(\sum_{j=1}^J (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \right).$$

Il indique la dispersion des données à l'intérieur de chaque échantillon autour de sa moyenne.

Principe du test :

Si l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie alors la quantité SC_F doit être petite par rapport à la quantité SC_R .

Par contre, si l'hypothèse alternative (\mathcal{H}_1) est vraie alors la quantité SC_F doit être grande par rapport à la quantité SC_R .

Pour comparer ces quantités, R. A. Fisher, après les avoir « corrigées » par leurs degrés de liberté (ddl), a considéré leur rapport.

Définition

Nous appelons **variance due au facteur** le terme

$$s_F^2 = \frac{SC_F}{I - 1}$$

et **variance résiduelle** le terme

$$s_R^2 = \frac{SC_R}{n - I}$$

Propriété

Si les **trois conditions** sont satisfaites et si (\mathcal{H}_0) est vraie alors

$$F_{obs} = \frac{s_F^2}{s_R^2}$$

est une réalisation d'une variable aléatoire F qui suit une loi de Fisher à $l - 1$ degrés de liberté au numérateur et $n - l$ degrés de liberté au dénominateur. Cette loi est notée $\mathcal{F}_{l-1, n-l}$.

Décision

Pour un seuil donné α (=5%=0,05 en général), les tables de Fisher nous fournissent une valeur critique c telle que $\mathbb{P}_{(\mathcal{H}_0)} [F \leq c] = 1 - \alpha$. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \text{si } c \leq F_{obs} & (\mathcal{H}_1) \text{ est vraie ,} \\ \text{si } F_{obs} < c & (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie .} \end{cases}$$

Tableau de l'ANOVA

L'ensemble de la procédure est résumé par un tableau, appelé **tableau de l'analyse de la variance (analysis of variance table)**, du type suivant :

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur	SC_F	$l - 1$	s_F^2	$\frac{s_F^2}{s_R^2}$	c
Résiduelle	SC_R	$n - l$	s_R^2		
Totale	SC_{Tot}	$n - 1$			

Retour à l'exemple

Pour les données de l'exemple des carburateurs, le tableau de l'analyse de la variance s'écrit :

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur	100,83	3	33,61	0,888	3,10
Résiduelle	757,00	20	37,85		
Totale	857,83	23			

Conclusion

Pour un seuil $\alpha = 5\%$, les tables de Fisher nous fournissent la valeur critique $c = 3,10$. Nous décidons donc que l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie : il n'y a donc pas de différence entre les moyennes théoriques de consommation selon le type de carburateur. **Nous en concluons que la consommation est stable selon le type de carburateur.**

Remarque

Nous avons décidé que les moyennes théoriques ne sont pas différentes dans leur ensemble, mais nous aurions très bien pu trouver le contraire. Nous analyserons ce cas par la suite avec un des tests de comparaisons multiples (cf paragraphe 4).

Vérification des trois conditions

Nous étudions les possibilités d'évaluer la validité des **trois conditions** que nous avons supposées satisfaites.

Condition d'indépendance

Il n'existe pas, dans un contexte général, de test statistique simple permettant d'étudier l'indépendance.

Ce sont les conditions de l'expérience qui nous permettront d'affirmer que nous sommes dans le cas de l'indépendance.

Condition de normalité

Nous ne pouvons pas, en général, la tester pour chaque échantillon. En effet le nombre d'observations est souvent très limité pour chaque échantillon.

Nous allons donc la tester sur l'ensemble des données.

Remarque

Remarquons que si les conditions sont satisfaites et si nous notons :

$$\mathcal{E}_{ij} = Y_{ij} - \mu_i,$$

alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}_{ij}) = \mathcal{N}(0 ; \sigma^2),$$

alors c'est la même loi pour l'ensemble des unités.

Les moyennes μ_i étant inconnues, nous les estimons par les estimateurs de la moyenne : les \bar{Y}_i où

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{ij}.$$

Suite de la remarque

Nous obtenons alors les estimations \bar{y}_i . Les quantités obtenues s'appellent les **résidus (residuals)** et sont notées \hat{e}_{ij} . Les résidus s'expriment par :

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J.$$

Les résidus peuvent s'interpréter comme des estimations des erreurs de mesures.

Tests utilisés pour tester la normalité

Nous pouvons alors tester la normalité, avec le **test de Shapiro-Wilk** ou avec le **test de Shapiro-Francia** sur l'ensemble des résidus.

Hypothèses

Nous notons la variable $\hat{\mathcal{E}}_{ij}$ la variable aléatoire dont le résidu \hat{e}_{ij} est la réalisation.

L'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\hat{\mathcal{E}}_{ij}) = \mathcal{N}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\hat{\mathcal{E}}_{ij}) \neq \mathcal{N}.$$

Décision pour le test de Shapiro-Francia

Pour un seuil donné α (= 5% en général), les tables de Shapiro-Francia nous fournissent une valeur critique c telle que $\mathbb{P}_{(\mathcal{H}_0)}[R \leq c] = \alpha$. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \text{si } r_{obs} \leq c & (\mathcal{H}_1) \text{ est vraie,} \\ \text{si } c < r_{obs} & (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie.} \end{cases}$$

Remarque : Dans le cadre de ce cours, la statistique de Shapiro-Francia ne sera jamais calculée. L'utilisateur connaîtra toujours la valeur r_{obs} .

Retour à l'exemple : le test de Shapiro-Francia

Pour un seuil $\alpha = 5\%$, les tables de Shapiro-Francia (qui sont à télécharger sur le site) nous fournissent, avec $n = 24$, la valeur critique $c = 0,9557$. Mais nous avons $r_{obs} = 0,9868$. Comme $c < r_{obs}$, l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie, c'est-à-dire que **nous décidons que l'hypothèse de normalité est satisfaite.**

Retour à l'exemple : le test de Shapiro-Wilk

Avec le logiciel R, nous avons

```
> shapiro.test(residuals(modele))  
Shapiro-Wilk normality test  
data: residuals(modele)  
W = 0.9654, p-value = 0.5554
```

Comme la p -valeur est supérieure à 0,05, l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie, c'est-à-dire que **nous décidons que l'hypothèse de normalité des résidus est satisfaite.**

Condition d'homogénéité

Plusieurs tests permettent de tester l'égalité de plusieurs variances. Parmi ceux-ci, le test le plus utilisé est le **test de Bartlett** dont le protocole est le suivant :

Hypothèses

L'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_I^2$$

contre l'hypothèse alternative

(\mathcal{H}_1) : Les variances σ_i^2 ne sont pas toutes égales.

Statistique

$$B_{obs} = \frac{1}{C_1} \left[(n - l) \ln(s_R^2) - \sum_{i=1}^l (n_i - 1) \ln(s_{c,i}^2) \right] \quad (3)$$

où

- la quantité C_1 est définie par :

$$C_1 = 1 + \frac{1}{3(l-1)} \left(\left(\sum_{i=1}^l \frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{n-l} \right),$$

- s_R^2 la variance résiduelle, $s_{c,i}^2$ la variance corrigée des observations de l'échantillon d'ordre i , ($i = 1, \dots, l$).

Propriété

Sous l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) le nombre B_{obs} défini par (3) est la réalisation d'une variable aléatoire B qui suit asymptotiquement une loi du khi-deux à $I - 1$ degrés de liberté.

En pratique, nous pouvons l'appliquer lorsque les effectifs n_i des I échantillons sont tous au moins égaux à 3. Ce test dépend de la normalité des observations.

Décision

Pour un seuil donné α (= 5% en général), les tables du khi-deux nous fournissent une valeur critique c telle que $\mathbb{P}_{(\mathcal{H}_0)}[B \leq c] = 1 - \alpha$. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \text{si } c \leq B_{obs} & (\mathcal{H}_1) \text{ est vraie,} \\ \text{si } B_{obs} < c & (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie.} \end{cases}$$

Retour à l'exemple

En se souvenant que **les n_i sont tous égaux**, nous avons, avec le logiciel R :

$$B_{obs} = 0,6503.$$

Pour un seuil $\alpha = 5\%$ la valeur critique d'un khi-deux à 3 degrés de liberté, est $c = 7,815$.

Comme $B_{obs} < c$, nous décidons que l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie, c'est-à-dire que l'hypothèse d'homogénéité des variances est vérifiée.

Objectif

Lorsque pour la comparaison des moyennes théoriques la décision est « l'hypothèse alternative (\mathcal{H}_1) est vraie », pour analyser les différences nous procédons à des tests qui comparent les moyennes entre elles. Ce sont les tests de comparaisons multiples, adaptations du test de Student. Un des tests les plus connus est : **le test de Tukey ou le test de Tukey-Kramer.**^a

a. Le test de Tukey est initialement prévu dans le cas où le plan est équilibré, tandis que le test de Tukey-Kramer lui est prévu dans le cas déséquilibré.

Notation

Les moyennes observées \bar{y}_i sont rangées par ordre croissant.
Nous les notons alors

$$\bar{y}_{(1)}, \bar{y}_{(2)}, \dots, \bar{y}_{(I)},$$

et les moyennes théoriques associées

$$\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \dots, \mu_{(I)}.$$

Test

La procédure du test de Tukey est la suivante :

Pour chaque $i < i'$, nous considérons **l'hypothèse nulle**

$$(\mathcal{H}_0) : \mu_{(i)} = \mu_{(i')}$$

contre **l'hypothèse alternative**

$$(\mathcal{H}_1) : \mu_{(i')} > \mu_{(i)}.$$

Statistique

Nous considérons le rapport :

$$t_{i',i,obs} = \frac{\bar{y}_{(i')} - \bar{y}_{(i)}}{\sqrt{\frac{s_R^2}{2} \left(\frac{1}{n_{i'}} + \frac{1}{n_i} \right)}}. \quad (4)$$

Propriété

Le rapport $t_{j',i,obs}$ défini par (4) est la réalisation d'une variable aléatoire T qui, si l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0) est vraie, suit une loi appelée **étendue studentisée (studentized range)** et que nous notons $\tilde{T}_{n-1, I}$.

Décision

Pour un seuil donné α (= 5% en général), les tables de l'étendue studentisée nous fournissent une valeur critique c telle que $\mathbb{P}_{(\mathcal{H}_0)}[T \leq c] = 1 - \alpha$. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \text{si } c \leq t_{i',i,obs} & (\mathcal{H}_1) \text{ est vraie,} \\ \text{si } t_{i',i,obs} < c & (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie.} \end{cases}$$

Remarque

La valeur critique c ne dépend que des indices $n - l$, degrés de liberté de la somme des carrés résiduelle, et de l , nombre des moyennes comparées. De plus, les moyennes théoriques, dont les moyennes observées sont comprises entre deux moyennes observées, dont les moyennes théoriques correspondantes sont déclarées égales, sont déclarées égales avec ces dernières.

Le contexte

Des forestiers ont réalisé des plantations d'arbres en trois endroits. Plusieurs années plus tard, ils souhaitent savoir si la hauteur des arbres est identique dans les trois forêts. Chacune des forêts constitue une population. Dans chacune des forêts, nous tirons au sort un échantillon d'arbres, et nous mesurons la hauteur de chaque arbre.

Les données

Forêt 1	Forêt 2	Forêt 3
23,4	18,9	22,5
24,4	21,1	22,9
24,6	21,1	23,7
24,9	22,1	24,0
25,0	22,5	24,0
26,2	23,5	
	24,5	

Le script de R

```
>foret<-rep(1:3,c(6,7,5))  
>foret  
>hauteur<-c(23.4,24.4,24.6,24.9,25.0,26.2,18.9,  
21.1,21.1,22.1,22.5,23.5,24.5,22.5,22.9,23.7,  
24.0,24.0)  
>hauteur  
>foret<-factor(foret)  
>arbre<-data.frame(foret,hauteur)  
>rm(foret)  
>rm(hauteur)  
>arbre  
>str(arbre)
```

Suite du script

```
>moy<-tapply(arbre$hauteur, arbre$foret, mean)
>moy
>moy.g<-mean(arbre$hauteur)
>moy.g
>ecart<-tapply(arbre$hauteur, arbre$foret, sd)
>ecart
>ecart.g<-sd(arbre$hauteur)
>ecart.g
```

Suite du script

```
>plot (arbre$foret, arbre$hauteur)  
>points (1:3, moy, pch="@")  
>abline (h=moy.g)
```

Suite du script

```
>modele1<-aov(hauteur~foret,data=arbre)
>modele1
>residus<-residuals(modele1)
>residus
>shapiro.test(residus)
>bartlett.test(residus~foret,data=arbre)
>summary(modele1)
```

Fin du script

```
>options(contrasts=c("contr.sum","contr.poly"))  
>modele2<-lm(hauteur~foret,data=arbre)  
>modele2  
>summary(modele2)  
>TukeyHSD(modele1)
```

Les résultats

```
>moy<-tapply(arbre$hauteur, arbre$foret, mean)
>moy
 1  2  3
24.75000 21.95714 23.42000
>moy.g<-mean(arbre$hauteur)
>moy.g
[1] 23.29444
```

Les résultats

```
>modele1  
Call:  
aov(formula = hauteur ~ foret, data = arbre)  
Terms:  
foret Residuals  
Sum of Squares 25.30930 26.00014  
Deg. of Freedom 2 15  
Residual standard error: 1.316565  
Estimated effects may be unbalanced
```

Les résultats

```
>shapiro.test(residus)
Shapiro-Wilk normality test
data: residus
W = 0.962, p-value = 0.6399

>bartlett.test(residus foret,data=arbre)
Bartlett test of homogeneity of variances
data: residus by foret
Bartlett's K-squared = 4.5849, df = 2, p-value
= 0.1010
```

Les résultats

```
>summary(modele1)
Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
foret 2 25.3093 12.6547 7.3007 0.006107
Residuals 15 26.0001 1.7333
```

Les résultats

```
>options(contrasts=c("contr.sum","contr.poly"))  
>modele2<-lm(hauteur foret,data=arbre)  
>modele2  
Call:  
lm(formula = hauteur foret, data = arbre)  
Coefficients:  
(Intercept) foret1 foret2  
23.376 1.374 -1.419
```

Les résultats

```
> summary(modele2)
Call:
lm(formula = hauteur ~ foret, data = arbre)
Residuals:
Min 1Q Median 3Q Max
-3.0571 -0.7729  0.1464  0.5707  2.5429
Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 23.3757  0.3133  74.621 < 2e-16
foret1  1.3743  0.4409  3.117  0.00707
foret2 -1.4186  0.4251 -3.337  0.00450
```

Suite des résultats de sorties sous R

```
Residual standard error: 1.317 on 15 degrees  
of freedom  
Multiple R-Squared: 0.4933, Adjusted  
R-squared: 0.4257  
F-statistic: 7.301 on 2 and 15 DF, p-value:  
0.006107
```

Les résultats

```
> TukeyHSD(modele1)
Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level
Fit: aov(formula = hauteur   foret, data =
arbre)
$foret
diff lwr upr p adj
2-1 -2.792857 -4.6954236 -0.8902906 0.0045463
3-1 -1.330000 -3.4007541 0.7407541 0.2492545
3-2 1.462857 -0.5395363 3.4652506 0.1735956
```