

T. D. n° 1

Les méthodes d'échantillonnage

Exercice 1. Soit une variable Y définie sur une population de taille $N = 4$ individus.

i	1	2	3	4
Y	11	10	8	11

1. Quelle est la distribution de Y ? En déduire l'espérance $\mathbb{E}[Y] = \mu$, la variance $\sigma^2 = \text{Var}[Y]$ et la variance corrigée notée σ_c^2 .
2. Nous tirons un échantillon de taille $n = 2$ sans remise, à probabilités égales.
 - a) Combien d'échantillons pouvons-nous tirer ?
 - b) Pour chaque échantillon, calculer sa moyenne $\hat{\mu}_2(obs)$ et sa variance corrigée $s_{2,c}^2$.
 - c) Quelle est la distribution de probabilité de l'estimateur de la moyenne $\hat{\mu}_2$?
 - d) Quelle est la distribution de probabilité de l'estimateur de la variance corrigée $S_{2,c}^2$?
 - e) En déduire, si c'est possible, $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2]$, $\text{Var}[\hat{\mu}_2]$, $\mathbb{E}[S_{2,c}^2]$ et $\text{Var}[S_{2,c}^2]$.
 - f) Commenter, c'est-à-dire comparer et analyser les résultats trouvés.
3. Nous tirons un échantillon de taille $n = 2$ avec remise, à probabilités égales. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 2.

Exercice 2. Dans un groupe de 80 étudiants on tire au hasard à probabilités égales sans remise un échantillon de taille n . Nous prendrons $n = 4$ puis $n = 40$.

1. Nous observons dans l'échantillon la variable aléatoire Y , dépense hebdomadaire pour la culture. Nous trouvons $\bar{y} = 12$ euros et $\sigma_y = 6$ euros. Donner dans les deux cas, une estimation de la dépense moyenne dans le groupe et la précision de cette estimation.
2. Nous observons dans l'échantillon 75% de femmes. Donner dans les deux cas, une estimation de la proportion de femmes dans le groupe et la précision de cette estimation.
3. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3. Une entreprise possède cinq succursales. Un inspecteur ne peut en examiner que deux par tournée. Dans chaque succursale, nous mesurons une variable d'intérêt Y (Nombre de nouveaux clients dans l'année). La situation réelle des cinq succursales est la suivante :

$$Y_1 = 100; \quad Y_2 = 80; \quad Y_3 = 100; \quad Y_4 = 120; \quad Y_5 = 90.$$

1. Énumérer tous les échantillons possibles correspondant à une tournée et pour chaque échantillon calculer $\hat{\mu}_2$, l'estimateur de la moyenne μ ainsi obtenu.

2. Vérifier que $\hat{\mu}_2$ est un estimateur sans biais.
3. Calculer la variance de $\hat{\mu}_2$ de deux manières différentes :
 - a) directement,
 - b) en utilisant les formules du cours.
4. Pour chaque échantillon possible, calculer la variance corrigée $S_{2,c}^2$ associée. Vérifier par calculs que $S_{2,c}^2$ est un estimateur sans biais de la variance corrigée σ_c^2 de la population U .