T. D. n^o 6

Tests de comparaison de moyennes Correction

Exercice 1. Gaz nocif. D'après l'examen de Janvier 2006.

1. **a.** Lorsque nous nous intéressons au changement d'une statistique μ dans une seule direction, nous optons pour un test *unilatéral.*
Les deux hypothèses sont les suivantes si nous nous intéressons à un changement du côté droit :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad (\leqslant) \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite.
Comme l'écart-type de la population est connu, $\sigma = 10$, nous utilisons la loi normale.
La zone de rejet est $[1,64; +\infty]$ puisque $\mathbb{P}[U > 1,64] = 0,95$.
La valeur de la réalisation de la statistique du test est

$$\sqrt{n} \times \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma}.$$

Ici l'application numérique donne

$$\sqrt{10} \times \frac{48 - 50}{10} \simeq -0,63 < 1,64.$$

Le test n'est donc pas significatif au seuil $\alpha = 5$ %.
Nous concluons, avec un risque de 5%, que la moyenne μ est inférieure ou égale à 50.

b. Au risque de $\alpha = 1$ %, la zone de rejet devient $[2,33; +\infty]$ puisque $\mathbb{P}[U > 2,33] = 0,99$.
Comme $-0,63 < 2,33$, le test n'est donc pas non plus significatif au seuil $\alpha = 1$ %.
Nous concluons, avec un risque de 1%, que la moyenne μ est inférieure ou égale à 50.
Au risque de $\alpha = 10$ %, la zone de rejet devient $[1,28; +\infty]$ puisque $\mathbb{P}[U > 1,28] = 0,90$.
Comme $-0,63 < 1,28$, le test n'est donc pas non plus significatif au seuil $\alpha = 10$ %.
Nous concluons, avec un risque de 10%, que la moyenne μ est inférieure ou égale à 50.

2. Lorsque nous nous intéressons au changement d'une statistique μ dans une seule direction, nous optons pour un test *unilatéral.*
Les deux hypothèses sont les suivantes si nous nous intéressons à un changement du côté droit :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad (\leqslant) \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite.
Comme l'écart-type σ de la population est inconnu nous utilisons la loi de Student à 200-1=199 degrés de liberté.
La zone de rejet est $[1,65;+\infty]$ puisque $\mathbb{P}[T > 1,65] = 0,95$.
La valeur de la réalisation de la statistique du test est

$$\sqrt{n} \times \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{s_c}.$$

Ici l'application numérique donne

$$\sqrt{200} \times \frac{51-50}{10} \simeq 1,41 < 1,64.$$

Le test n'est donc pas significatif au seuil $\alpha = 5$ %.
Nous concluons, avec un risque de 5%, que la moyenne μ est inférieure ou égale à 50.

Exercice 2. Pisciculture. D'après l'examen de Janvier 2006.

Calculons la moyenne et l'écart-type de la longueur des poissons des deux échantillons A et B.

$$\hat{\mu}_A = \frac{3780}{180} = 21,0 \quad s_A^2 = \frac{80000}{180} - 21,0^2 = 3,44 \quad s_{c_A}^2 = \frac{180}{179}\left(\frac{80000}{180} - 21,0^2\right) = 3,46$$

$$\hat{\mu}_B = \frac{2140}{100} = 21,4 \quad s_B^2 = \frac{46000}{100} - 21,4^2 = 2,04 \quad s_{c_A}^2 = \frac{100}{99}\left(\frac{46000}{100} - 21,4^2\right) = 2,06.$$

Détaillons la règle de décision du test de l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu_A \neq \mu_B.$$

Nous remarquons qu'il s'agit ici d'un test *bilatéral*.

Nous considérons la statistique suivante :

$$u = \frac{\widehat{\mu_A} - \widehat{\mu_B}}{\sqrt{\dfrac{s_{c_A}^2}{n_A} + \dfrac{s_{c_B}^2}{n_B}}} \qquad (u \simeq -2,00).$$

Si l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est vraie, alors u est la réalisation d'une variable aléatoire U dont la loi est sensiblement la loi normale centrée et réduite :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}_0}(U) \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Pour un niveau fixé $\alpha = 5\%$, les tables de la loi normale centrée et réduite nous fournissent une valeur critique $c_{\alpha/2} = 1,96$ telle que $\mathbb{P}[-c_{\alpha/2} \leqslant U \leqslant c_{\alpha/2}] = 1 - \alpha = 0,95$.
Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 \text{ est vraie si } u \leqslant -c_{\alpha/2} \text{ ou } c_{\alpha/2} \leqslant u & (-2,00 \leqslant -1,96 \text{ ou } 1,96 \leqslant -2,00) \\ \mathcal{H}_0 \text{ est vraie si } -c_{\alpha/2} < u < c_{\alpha/2} & (-1,96 < -2,00 < 1,96). \end{cases}$$

La condition $[-2,00 \leqslant -1,96$ ou $1,96 \leqslant -2,00]$ est donc remplie puisque $-2,00 \leqslant -1,96$. Il en résulte que le test est significatif au seuil $\alpha = 5\%$. Nous rejetons donc l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au niveau $\alpha = 5\%$ et nous décidons d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$. Ainsi, une différence de régime alimentaire affecte significativement la croissance des poissons au seuil $\alpha = 5\%$.