Correction du Galop numéro 1.

Exercice 6 :

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = \dfrac{a(1+a^2)}{1+x^2}$.

1. Donnons le tableau des variations de f_a :

f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus f_a est paire, car si $x \in \mathbb{R}$ $-x \in \mathbb{R}$ et $f_a(-x) = f_a(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = \dfrac{-a(1+a^2) \times 2x}{(1+x^2)^2}$

Le signe de $f_a'(x)$ dépend de celui de $(-2x)$ car $a(1+a^2) > 0$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	
f_a	0	$\nearrow$	$a(1+a^2)$	$\searrow$	0^+

$f_a(0) = a(1+a^2)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a(1+a^2)}{1+x^2} = 0^+$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x)$

2.a. $f_a(x) = x \iff \dfrac{a(1+a^2)}{1+x^2} = x$

$f_a(x) = x \iff a(1+a^2) = x(1+x^2)$

Posons $x(1+x^2) = a(1+a^2)$: (1).

(1) est une équation du troisième degré, qui admet au moins une solution réelle.

$x^3 + x - a(1+a^2) = 0$.

$x = a$ vérifie (1). Donc $(x-a)$ divise $x^3 + x - a(1+a^2)$.

(1) devient : $X^3+X-a(1+a^2)=(X-a)P(X)$ où $P(X)$ est un polynôme du second degré à coefficients réels.

$P(X)$ s'écrit donc : $P(X)=\alpha X^2+\beta X+\gamma$

$(X-a)P(X)$ devient alors $\alpha X^3+\beta X^2-a\alpha X^2+\gamma X-a\beta X-a\gamma$.

Par identification avec $X^3+X-a(1+a^2)$, nous obtenons :

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta-a\alpha=0\\ \gamma-a\beta=1\\ a(1+a^2)=a\gamma\end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=a\\ \gamma=1+a^2.\end{cases}$$

Donc (1) s'écrit alors : $(X-a)\left(X^2+aX+(1+a^2)\right)$.

Calculons le discriminant de $X^2+aX+(1+a^2)$.

$$\Delta=a^2-4(1+a^2)=-3a^2-4<0.$$

Donc $X^2+aX+(1+a^2)$ n'admet pas de racines <u>réelles</u>.

Donc l'équation $f_a(x)=x$ admet pour seule racine réelle $x=a$.

2.b. Résolvons $f_a(x)=a$.

$$f_a(x)=a \iff \frac{(1+a^2)a}{1+x^2}=a$$

$$\iff (1+a^2)=(1+x^2) \text{ car } a>0 \text{, d'après l'énoncé.}$$

$$f_a(x)=a \iff x^2=a^2.$$

$$\iff (x-a)(x+a)=0.$$

$$\iff x=a \text{ ou } x=-a.$$

Donc l'équation $f_a(x)=a$ admet deux solutions réelles qui sont $+a$ et $-a$.

3. On prend $a=1$.

a. Calculons $f_1\circ f_1(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_1\circ f_1(x)=f_1(f_1(x))$$
$$=f_1\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$f_1\circ f_1(x)=\frac{2}{1+\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}.$$

$$=\frac{2(1+x^2)^2}{4+(1+x^2)^2}.$$

b. Montrons que $f_1\circ f_1(x)=x$ équivaut à $P_1(x)=0$.

$$f_1\circ f_1(x)=x \iff \frac{2(1+x^2)^2}{4+(1+x^2)^2}=x$$
$$\iff 2(1+x^2)^2=4x+x(1+x^2)^2$$
$$\iff x^5-2x^4+2x^3-4x^2+5x-2=0$$

Donc $P_1(x)=x^5-2x^4+2x^3-4x^2+5x-2$.

c. Vérifions que 1 est racine multiple de $P_1(x)=0$.

$$P_1(1)=1-2+2-4+5-2$$
$$=0.$$

Donc 1 est au moins racine simple de $P_1(x)=0$.

1 est-elle racine double?

$P_1'(x)=5x^4-8x^3+6x^2-8x+5$ (P_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale)

$$P_1'(1)=5-8+6-8+5$$
$$=0.$$

Donc 1 est au moins racine double de $P_1(x)=0$.

$P_1''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 12x - 8$

$P_1''(1) = 20 - 24 + 12 - 8$

$= 0.$

Donc 1 est au moins racine triple de $P_1(x) = 0$.

$P_1'''(x) = 60x^2 - 48x + 12$

$P_1'''(1) = 60 - 48 + 12$

$\neq 0$

Donc 1 est racine triple de $P_1(x) = 0$.

d. Résolvons $f_1 \circ f_1(x) = x$.

$$f_1 \circ f_1(x) = x \iff \frac{2(1+x^2)^2}{4+(1+x^2)^2} = x$$

$$\iff P_1(x) = 0.$$

Or $P_1(x) = (x-1)^3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.

En développant $(x-1)^3(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ et par identification, on obtient
$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1. \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Donc $P_1(x) = (x-1)^3(x^2 + x + 2) = (x-1)^3\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right)$

Or $\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right)$ n'admet pas de racines réelles.

Donc $P_1(x) = 0$ admet comme unique racine réelle 1, de multiplicité égale à 3.

4) a) Nous avons calculé à la question 1 :

$$f_a(x) - x = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2} - x = \frac{(a-x)}{1+x^2}(x^2+ax+a^2+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons montré que $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2+xa+a^2+1 > 0$.
Comme également $1+x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f_a(x) - x > 0 \iff a - x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $f_a(x) > x \iff x < a$,
$f_a(x) = x \iff x = a$,
$f_a(x) < x \iff x > a$.

Remarquons également que si $x \in [0;a[$ alors $f_a(x) > x$.
si $x = a$ alors $f_a(a) = a$
si $x \in]a;+\infty[$ alors $f_a(x) < x$

et que si $x \in [0;a[$, $f_a(x) = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2} > a$.
$x \in]a;+\infty[$, $f_a(x) = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2} < a$.

Ainsi $f_a([0;a[) \subset]a;+\infty[$ et $f_a(]a;+\infty[) \subset [0;a[$.
Nous en déduisons que $(f_a \circ f_a)([0;a[) \subset [0;a[$ et
$(f_a \circ f_a)(]a;+\infty[) \subset]a;+\infty[$.

Nous savons que f_a est décroissante sur $[0;+\infty[$ (question 1 c)
Ainsi $\forall (x,y) \in [0;+\infty[$ tels que $x \leq y$, $f_a(x) \geq f_a(y)$ et
$(f_a \circ f_a)(x) \leq (f_a \circ f_a)(y)$: $f_a \circ f_a$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

- Si $v_0 = u_0 \leq (f_a \circ f_a)(u_0) = v_1$ alors $\underbrace{(f_a \circ f_a)(v_0)}_{= v_1} \leq \underbrace{(f_a \circ f_a)(v_1)}_{= v_2}$.

et en itérant le procédé on obtient $v_n \leq v_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si $v_0 = u_0 \geq (f_a \circ f_a)(u_0) = v_1$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_{n+1}$.
Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

- Il en va de même pour $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $v_0 \leq v_1$ alors $f_a(v_0) \geq f_a(v_1)$ c'est-à-dire $u_1 \geq u_3$
ou encore $w_0 \geq w_1$ et ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow \iff (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow$
Si $v_0 \geq v_1$ alors $f_a(v_0) \leq f_a(v_1)$ c'est-à-dire $w_0 \geq w_1$,
ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow \iff (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$.

4) b) * Si $u_0 \in [0;a[$ alors $v_0 = u_0 \in [0;a[$, donc $v_0 \leq a$, et $u_1 = f_a(u_0) = w_0 \in]a;+\infty[$, donc $w_0 \geqslant a$.

Puis $f_a \circ f_a$ laisse $[0;a[$ et $]a;+\infty[$ stables donc

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \in [0;a[$ si $u_0 \in [0;a[$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_n \in]a;+\infty[$ si $u_0 \in [0;a[$.

* Si $u_0 \in]a;+\infty[$ alors $v_0 = u_0 \in]a;+\infty[$ et $u_1 = f_a(u_0) = w_1 \in [0;a[$, donc $w_1 \leq a$.

À nouveau $f_a \circ f_a$ laisse $[0;a[$ et $]a;+\infty[$ stables donc

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [0;a[$ si $u_0 \in]a;+\infty[$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]a;+\infty[$ si $u_0 \in]a;+\infty[$.

4) c) $f_a([0;a[) \subset]a;a(1+a^2)]$ et $f_a(]a;a(1+a^2)]) \subset [0;a[$.

Ainsi si $u_0 \in [0;a[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0;a(1+a^2)]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

si $u_0 \in]a;+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0;\max(u_0, a(1+a^2))]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée : elle converge. De même $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et bornée : elle converge.

5) a) La question 4) c) donne $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Elles convergent vers $\ell \in [0;+\infty[$ tq $(f_a \circ f_a)(\ell) = \ell$, avec $a=1$.

La question 3) d) donne $\ell = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b) 5) a) donne $u_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Par conséquent, $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

6) a) $f_a(x) = \dfrac{a(1+a^2)}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, f_a est ~~dérivable~~ dérivable.

$f_a'(x) = 2x \dfrac{a(1+a^2)}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f_a'(a) = \dfrac{2a^2}{1+a^2} = \dfrac{a^2+a^2}{1+a^2} > 1$ car $a > 1$.

b) f_a' est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. La continuité de f_a' en a assure :

$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in [a-\delta; a+\delta]$, $|f_a'(x)| \geqslant 1$.

c) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad$ $v_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell_1$ et $w_n \to \ell_1$

car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Or 4) b) donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq a \leq w_n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq a \leq v_n$.

En passant à la limite, nous obtenons $\ell_1 \leq a \leq \ell_1$ ou encore $\ell_1 = a$.

Par conséquent $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$.

Nous avons montré que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle tend vers a.

Ainsi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \quad u_n \in [a-\delta ; a+\delta]$.

L'inégalité des accroissements finis sur $[a-\delta ; a+\delta]$ donne :

$$\forall (x,y) \in [a-\delta ; a+\delta]^2 \inf_{u\in[a-\delta;a+\delta]} |f_a'(u)| \, |x-y| \leq |f_a(x)-f_a(y)| \leq \sup_{u\in[a-\delta;a+\delta]} |f_a'(u)| \quad |x-y|$$

Puis 6) b) donne $\forall x \in [a-\delta ; a+\delta] \; |f_a'(x)| \geq 1$ d'où

$$\forall (x,y) \in [a-\delta ; a+\delta]^2, \quad |f_a(x) - f_a(y)| \geq |x-y|.$$

Enfin, $a \in [a-\delta ; a+\delta]$ et $\forall n \geq n_0 \; u_n = f_a^n(a) \in [a-\delta ; a+\delta]$

et ainsi $|f_a(f_a^n(a)) - f_a(a)| \geq |f_a^n(a) - a| \quad \forall n \geq n_0$.

Comme $f_a(a) = a$, nous obtenons $|u_{n+1} - a| \geq |u_n - a| \quad \forall n \geq n_0$.

Par conséquent, $|u_{n_0} - a| \leq |u_{n_0+1} - a| \leq \dots \leq |u_n - a| \quad \forall n \geq n_0$.

6) d) Si $u_0 = a$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \; u_n = a$ et $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$.

Si $u_0 \neq a$ alors $u_1 = f_a(u_0) \neq a, \dots, u_n = f_a^n(u_0) \neq a$.

Par conséquent, $|u_{n_0} - a| > 0$. Or si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors (6)c)) $u_n \xrightarrow[n\infty]{} a$ et $\forall n \geq n_0$

$|u_n - a| \geq |u_{n_0} - a| > 0$ et ainsi $u_n \underset{n\infty}{\not\to} a$.

Il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $u_0 = a$.

7) a) $$(f_a \circ f_a)(x) = f_a\left(\frac{a(1+a^2)}{1+x^2}\right) = \frac{a(1+a^2)}{1 + \frac{a^2(1+a^2)^2}{(1+x^2)^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) $$(f_a \circ f_a)(x) = x \iff \frac{a(1+a^2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + a^2(1+a^2)^2} = x$$

$$\iff a(1+a^2)(1+2x^2+x^4) = x + 2x^3 + x^5 + a^2(1+a^2)^2 x$$

$$\iff x^5 - a(1+a^2)x^4 + 2x^3 - 2a(1+a^2)x^2 + x + a(1+a^2)[xa(1+a^2) - 1] = 0$$

Ainsi $(f_a \circ f_a)(x) = x \iff P_a(x) = 0$ avec

$P_a(X) = X^5 - a(1+a^2)X^4 + 2X^3 - 2a(1+a^2)X^2 + X + a(1+a^2)(a^2(1+a^2) - 1)$.

c) $$P_a(a) = a^5 - a(1+a^2)a^4 + 2a^3 - 2a(1+a^2)a^2 + a + a(1+a^2)(a^2(1+a^2) - 1)$$
$$= \cancel{a^5} - \cancel{a^5} - a^7 + \cancel{2a^3} - \cancel{2a^3} - 2a^5 + a + (a+a^3)(a^2+a^4-1)$$
$$= -\cancel{a^7} + \cancel{a} - \cancel{2a^5} + \cancel{a^3} + \cancel{a^5} - \cancel{a} + \cancel{a^5} + \cancel{a^7} - \cancel{a^3} = 0$$

Par conséquent, il existe $Q_a(X) \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que

$P_a(X) = (X-a)\,Q_a(X)$.

Posons $Q_a(X) = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 + \delta X + \varepsilon$

$P_a(X) = (X-a)\,Q_a(X)$ donc $\alpha = 1$ et $\varepsilon = (1-a^2(1+a^2))(1+a^2)$

$= (X-a)(X^4+\beta X^3+\gamma X^2+\delta X + (1+a^2)(1-a^2(1+a^2)))$

$= X^5 + (\beta - a)X^4 + (\gamma - a\beta)X^3 + (\delta - a\gamma)X^2 + ((1+a^2)(1-a^2(1+a^2)) - a\delta)X$
$\quad - a(1+a^2)(1-a^2(1+a^2))$

$= X^5 - a(1+a^2)X^4 + 2X^3 - 2a(1+a^2)X^2 + X + a(1+a^2)(a^2(1+a^2)-1)$

D'où $\beta = a - a - a^3 = -a^3$
$\gamma = -a^4 + 2$
$\delta = -a^5 + 2a - 2a - 2a^3 = -a^5 - 2a^3$

<u>OK</u> $(1+a^2)(1-a^2-a^4) + a^6 + 2a^4 = 1 - \cancel{a^2} - \cancel{a^4} + \cancel{a^2} - \cancel{a^4} - \cancel{a^6} + \cancel{a^6} + \cancel{2a^4}$

Ainsi $Q_a(X) = X^4 - a^3X^3 + (2-a^4)X^2 - (a^5+2a^3)X + (1+a^2)(1-a^2(1+a^2))$

d) $Q_a'(X) = 4X^3 - 3a^3X^2 + 2(2-a^4)X - (a^5+2a^3)$
$Q_a''(X) = 12X^2 - 6a^3X + 2(2-a^4)$
$Q_a'''(X) = 24X - 6a^3$ $\qquad Q_a'''(x_0) = 0 \iff x_0 = \frac{a^3}{4} < a$ car $0<a<1$.

	0		$a^3/4$		a		$+\infty$
$Q_a'''(X)$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q_a''(X)$		$+ \searrow$	≥ 1	$+ \nearrow$		$+$	
$Q_a'(X)$		$\nearrow$			≥ 0	$+$	

$Q_a''\left(\frac{a^3}{4}\right) = \frac{12a^6}{16} - \frac{6a^6}{4} + 2(2-a^4)$
$= \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)a^6 + 2(2-a^4)$
$= 4 - 2a^4 - \frac{3}{4}a^6 \geq 1$
car $0<a<1$.

$Q_a'(a) = 4a^3 - 3a^5 + 2(2-a^4)a$
$\quad - a^5 - 2a^3$
$= 6(a^3 - a^5) + 4a$
≥ 0 car $0<a<1$.

Par conséquent Q_a est croissante sur $[a;+\infty[$.
Le polynôme $P_a(x)$ n'admet qu'une racine sur $[a;+\infty[$ en $x = a$.

Ainsi si $x \geq a$, $(f_a \circ f_a)(x) = x \iff x = a$.

e) La question 4. donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers ℓ_1 tq $(f_a\circ f_a)(\ell_1) = \ell_1$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers ℓ_2 tq $(f_a \circ f_a)(\ell_2) = \ell_2$.

On a soit $u_n \leq a \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $v_n \leq a \leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Si $v_n \leq a \leq w_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ alors ℓ_2 tq $\ell_2 \geq a$ et $(f_a \circ f_a)(\ell_2) = \ell_2$. Ainsi 7) d) $\Rightarrow \ell_2 = a$.

Puis $v_{n+1} = u_{2n+2} = f_a(u_{2n+1}) = f_a(w_n) \underset{n \infty}{\longrightarrow} f_a(\ell_2)$

car f_a continue en $\ell_2 = a$

Ainsi $v_n \underset{n \infty}{\longrightarrow} f_a(\ell_2) = f_a(a) = a$.

Par conséquent $u_n \underset{n \infty}{\longrightarrow} a$.

Il suffit d'échanger le rôle de v_n et de w_n si on a en fait,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \leq a \leq v_n$, pour montrer que $u_n \underset{n \infty}{\longrightarrow} a$.

Ainsi dans tous les cas $u_n \underset{n \infty}{\longrightarrow} a$.