T. D. n$^{\text{o}}$ 2
Fonctions d'une variable réelle : continuité, dérivation.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 2, 2007.
On considère la fonction h de la variable numérique x définie par :

$$h(x) = x - 1 - \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (i) Étudier les variations de h, dresser son tableau de variation, puis tracer son graphe $\mathcal{C}_h$.
   (ii) En déduire une majoration de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Démontrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, 2006.
Partie I : Préliminaires.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{\exp(x+1)}{2x+1}.$$

1. Justifier que g est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.
2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \dfrac{\exp(x+1)}{2x+1} > 1$ puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{2x+1} > \exp(-(x+1)).$$

3. Déterminer la nature de l'asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g en $+\infty$.

Partie II : Étude d'une suite.
Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \exp(-x).$$

1. Étudier la variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution u_n et une seule.

3. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).
   (i) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n > n$. En déduire la limite de la suite (u_n).
   (ii) En utilisant la question 2 de la Partie I, montrer que $f_n(n+1) > 0$. En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, 2007.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on note la fonction numérique f_n définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{x^2} - \frac{1}{2}.$$

1. Étude de la fonction f_n
   a. Étudier la variation de la fonction f_n sur I et déterminer la nature des branches infinies de $(\mathcal{C}_n)$, courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal.
   b. Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_n)$. Montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont vous déterminerez l'abscisse.
   c. Déterminer les positions relatives de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.
   d. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant :
   $$1 < u_n < \sqrt{e} < v_n.$$
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$
   a. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est décroissante.
   b. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $1 - t \leqslant \frac{1}{t+1} \leqslant 1$. En déduire que pour tout $a \geqslant 0$,
   $$a - \frac{a^2}{2} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a.$$
   c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a
   $$\frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leqslant \ln u_n \leqslant u_n - 1$$
   En déduire, pour tout $n \geqslant 4$, $\dfrac{1}{2n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \dfrac{e}{n}$.
   d. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \geqslant 4}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geqslant 4}$
   a. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a $v_n > \exp\left(\frac{5}{6}\right)$.
   b. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geqslant 4}$.

Exercice 4 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 2, 2008.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right).$$

1. Donner le développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre $2n+1$ en 0. Exprimer $f_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, à l'aide de développement limité puis en déduire que f_n peut être prolongée par continuité en 0.
2. Calculer $f_n^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   Déterminer deux polŷnomes P_n et Q_n de degré n tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_n^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)\exp(x) - P_n(x)}{x^{2n+1}}.$$
3. En utilisant les résultats de la question 1., montrer que f_n est n fois dérivable en 0, puis en déduire $f_n^{(n)}(0)$.
   Déterminer un équivalent de $\exp(x) - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ en 0.

Exercice 5 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2008.
On rappelle que la fonction arcsin : $x \to \arcsin(x)$, définie sur $[-1;1]$ à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, est continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$.
De plus la fonction arcsin est la fonction réciproque de la fonction sin, c'est-à-dire que pour tout $x \in [-1;1]$ et tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin \circ \arcsin(x) = x \quad \text{et} \quad \arcsin \circ \sin(y) = y.$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $f : x \to (\arcsin(x))^2$ au voisinage de 0.

Exercice 6 : D'après le concours d'élève titulaire de l'ENSAI, concours externe d'attaché de l'INSEE, 2003.

1. Soit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$. Monter que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note S sa limite.
2. Soit une fonction f dérivable dans un voisinage de 0 telle que $f'(0) = 0$. Soit $\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right) - (n+1)f(0)$.
   Montrer que $\sigma_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
3. Soit une fonction g dérivable dans un voisinage de 0 telle que $g'(0) = T$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(g) = g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + g\left(\frac{1}{2n}\right) - (n+1)g(0)$.

4. Calculer $\sigma_n(g)$ pour $g(x) = \ln(1+x)$ (ln désigne le logarithme népérien). En déduire la valeur de S.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right]$.

Exercice 7 : D'après le concours d'inspecteur des impôts - Analyste, 2008.
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ & \text{et} & \\ f(x) & = & x^{1+\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0. \end{array}$$

On désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. Déterminer la fonction dérivée de f. Étudier le signe $f'(x)$, puis en déduire le sens de variation de f.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$. Préciser la nature de la branche infinie de C_f en $+\infty$.
5. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f en 1. (On pourra poser $x = 1 + t$).
6. En déduire l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 ainsi que sa position par rapport à C_f.
7. Tracer C_f ainsi que T dans un repère orthonormé.

Exercice 8 : D'après le concours d'inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes du 5 et 6 avril 2005.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \exp(x) + x + 1$.
   (i) Étudier les variations de g et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (ii) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution a. Donner un encadrement de a d'amplitude 0,01.
   (iii) En déduire le signe de g en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{x\exp(x)}{\exp(x)+1}$.
   On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé dont l'unité graphique est 4 cm.
   (i) À l'aide de 1., étudier le sens des variations de f.
   (ii) Montrer que $f(a) = a + 1$.

3. (i) Chercher les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (ii) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).
   (iii) Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. (i) Déterminer une équation de (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
   (ii) Étudier la position de (C) par rapport à (T).
5. Représenter $(T), (D)$ et (C) pour les valeurs de x comprises entre $-2,5$ et 2.

Exercice 9 : D'après le concours d'inspecteur du trésor, épreuve 2, 2004.
Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f \circ f = f$.

Exercice 10 :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

a) Sans chercher à la calculer, justifier l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
b) Montrer que F est impaire. On pourra à cet effet dériver $x \times F(x) + F(-x)$.
c) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculer la dérivée de G et montrer que F possède une limite en $+\infty$ qui vaut $2F(1)$.
d) On considère H définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(\tan(x))$.
   (i) Montrer que H est dérivable et calculer H'.
   (ii) En déduire une expression simple de H.
e) Déterminer la valeur de $F(1)$ et de la limite de F en $+\infty$.