T. D. n$^{\text{o}}$ 5
Espaces préhilbertiens réels ou complexes.

Exercice 1 : Inspecteur des impôts, épreuve 2, 2007.
Notons $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions numériques définies, continues, intégrables et de carrés intégrables sur[1] un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \mid \int_I |f(t)|dt < +\infty \text{ et } \int_I f(t)^2 dt < +\infty \right\}.$$

On notera $\mathcal{E}^*$, l'ensemble $\mathcal{E}$ privé de la fonction identiquement nulle.

A−Produit scalaire

1. Démontrer[2] que pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)g(t)|dt$ est finie.
   En déduire que l'application $\phi \;:\; (f, g) \to \displaystyle\int_I f(t)g(t)dt$ est définie sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.
2. Démontrer que ϕ est bilinéaire, symétrique.
3. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ on a $\phi(f, f) \geqslant 0$.
   Démontrer que $\phi(f, f) = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle.
4. Soit $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$.
   Montrer que $P \;:\; \lambda \in \mathbb{R} \mapsto P(\lambda) = \phi(\lambda f + g, \lambda f + g)$ est un trinôme.
   Déterminer le signe de ce trinôme et en déduire que :
   $$\phi(f, g)^2 \leqslant \phi(f, f)\phi(g, g).$$
   Démontrer qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.
   Prouver que :
   $$\phi(f + g, f + g) \leqslant \left(\sqrt{\phi(f, f)} + \sqrt{\phi(g, g)}\right)^2.$$

B−Géométrie

Toutes les fonctions considérées sont des éléments de $\mathcal{E}$ et pour alléger les notations on pose :

$$q(f) = \phi(f, f) \text{ et } \|f\| = \sqrt{q(f)} = \sqrt{\phi(f, f)}.$$

1. Démontrer que :
   $$\phi(f, g) = 0 \Leftrightarrow \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$
   On dit alors que f et g sont orthogonales.

[1] Si I est un intervalle de borne inférieure a et de borne supérieure b on a $\int_I u(t)dt = \int_a^b u(t)dt$.
[2] **Indication :** on pourra utiliser la deuxième égalité remarquable.

2. Démontrer que :
$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right).$$
Que peut-on en déduire si f et g sont orthogonales ?
Quelle analogie avec la géométrie euclidienne du plan $\mathbb{R}^2$ peut-on faire ?
3. On suppose que $I=[0;1]$ et on considère $f\in\mathcal{E}^*$ une fonction non constante. On considère le sous-espace vectoriel V engendré par f et la fonction $\mathbf{I}$ définie par :
$$\forall t\in[0;1]\quad \mathbf{I}(t)=1.$$
Démontrer pour tout $g\in\mathcal{E}\setminus V$ il existe un unique couple de réels $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall h\in V\quad \phi(g-\lambda f-\mu\mathbf{I},h)=0.$$
Déterminer λ et μ. On pose $\pi_V(g)=\lambda f+\mu$. En utilisant une analogie avec la géométrie euclidienne du plan, que peut-on dire de $\pi_V(g)$?
4. En utilisant les notations de la question précédente démontrer que pour toute $h\in V\setminus\{\pi_V(g)\}$ on a :
$$\|g-\pi_V(g)\|<\|g-h\|.$$

Exercice 2 : Inspecteur des impôts, épreuve 2, 2008.
On considère le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{X}=\mathbb{C}^m$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ et l'application $\phi\ :\ \mathbb{X}\times\mathbb{X}\ \rightarrow\ \mathbb{C}$ définie par :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}\quad \phi(x,y)=\sum_{i=1}^{m}x_i\overline{y_i}.$$

Rappel : inégalité de Hölder :
Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ et pour tout $p\in]1;+\infty[$ on a :
$$\left|\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

A−Étude de la norme définie par ϕ

1. Démontrer que ϕ est linéaire par rapport à la première variable.
2. Démontrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}$, $\phi(y,x)=\overline{\phi(x,y)}$.
3. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{X}$, $\phi(x,x)\in\mathbb{R}^+$ et que $\phi(x,x)=0$ si et seulement si $x=0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{X} \text{ on pose } N(x)=\sqrt{\phi(x,x)}}$$

4. Démontrer que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{X} & N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \forall (\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{X} & N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} & N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} & N(x - y) \geqslant |N(x) - N(y)| \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{X} \text{ on pose } N_\infty(x) = \sup_{i=1,\ldots,m} |x_i| \quad N_1(x) = \sum_{i=1}^{m} |x_i|}$$

5. Démontrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$

$$N_\infty(x - y) \leqslant N_1(x - y) \leqslant \sqrt{m} N(x - y)$$

et que

$$N(x - y) \leqslant \sqrt{m} N_\infty(x - y).$$

6. On considère une suite de cauchy [sic] $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{X}$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant l \geqslant M \quad \text{tel que} \quad N\left(x^{(k)} - x^{(l)}\right) \leqslant \epsilon.$$

Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{X}$ tel que $\lim_{k \to +\infty} N\left(x - x^{(k)}\right) = 0$.

B−Formes linéaires sur $\mathbb{X}$

L'ensemble $\mathbb{X}^*$ des formes linéaires sur $\mathbb{X}$ est l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{C}$. On définit également la boule unité de $\mathcal{B}_1$ et la sphère unité $\mathcal{S}_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(\mathbb{X}) &= \{x \in \mathbb{X} | N(x) \leqslant 1\} \\ \mathcal{S}_1(\mathbb{X}) &= \{x \in \mathbb{X} | N(x) = 1\}. \end{aligned}$$

1. Démontrer que si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique[3] du $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{X}$ alors

$$\mathcal{S}_1(\mathbb{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i e_i \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m,\ \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^2 = 1 \right\}$$

2. Démontrer que si $f \in \mathbb{X}^*$ alors il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{S}_1(\mathbb{X})$, $|f(x)| \leqslant K$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{X} \text{ on pose } \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{S}_1(\mathbb{X})} |f(x)|}$$

[3] $e_i = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{i^{\text{e}} \text{ composante égale à } 1}$

3. Soit $f \in \mathbb{X}^*$.
   Démontrer que si $x \neq 0$ il existe un unique couple $(\lambda, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathcal{S}_1$ tel que $f(x) = \lambda f(y)$.
   En déduire que pour tout $x \in \mathbb{X}$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \times N(x)$.
4. Démontrer que $f \in \mathbb{X}^*$ est continue en 0, puis en déduire que f est continue.
5. Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{X}$ l'application f_y définie pour tout $x \in \mathbb{X}$ par $f_y(x) = \phi(x, y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{X}$.
6. Démontrer que si $f \in \mathbb{X}^*$, alors il existe un unique $y \in \mathbb{X}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$, $f(x) = \phi(x, y)$.

Exercice 3 : EN3S, 2007.
Soit $\boldsymbol{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$ continues et intégrables et $\boldsymbol{F}$ l'ensemble des applications de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$ continues et dont le carré est intégrable sur $]0;1[$.

1. Montrer que $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.
2. Si g et h sont deux éléments de $\boldsymbol{F}$, on note
   $$(g|h) = \int_0^1 g(t)h(t)dt.$$
   Montrer que $(g|h)$ définit un produit scalaire sur $\boldsymbol{F}$.
3. Pour $g \in \boldsymbol{E}$, on définit pour tout $x \in]0;1]$
   $$G(x) = \ln(x) \int_0^x g(t)dt + \int_x^t \ln(t)g(t)dt.$$
   a. Montrer que $G \in \mathcal{C}^2\left(]0;1], \mathbb{R}\right)$.
   b. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
   $$g(x) = xG''(x) + G'(x).$$
   c. Déterminer $G(1)$ et la limite en 0^+ de $xG'(x)$.
   d. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
   $$\forall x \in]0;1], |G'(x)| \leqslant a/x.$$
   e. Montrer que $G \in \boldsymbol{F}$.
4. Soit U l'application de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{E}$ définie par $U(g) = G$ où g et G sont les deux fonctions définies en 3.
   a. Montrer que U est linéaire. U est-elle injective, surjective ?
   b. Montrer que pour toutes fonctions g et h de $\boldsymbol{F}$ [sic], on a
   $$(g|U(g)) \leqslant 0.$$
   Dans quel cas a-t-on $(g|U(g)) = 0$?

c. Montrer que si U a des valeurs propres, elles sont strictement négatives et que ses vecteurs propres appartiennent à $\boldsymbol{F}$.

Exercice 4 : D'après un Sujet blanc EN3S, 2009.
Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ la base canonique de E.
Nous notons E_n le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B}_n = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E_n.
Nous notons également u l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P appartenant à E associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par :

$$Q(X) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

a) (i) Déterminez $u(P)$ lorsque P est un polynôme constant.
   (ii) Soit P un polynôme de degré $k \geqslant 1$. Déterminez le degré de $u(P)$. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, E_n est stable par u.

b) Nous noterons désormais u_n la restriction de u à E_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit M_n la matrice représentative de u_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n$.
   (i) Calculez $u(X^k)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.
   (ii) Écrire M_0, M_1, M_2 et M_3.
   (iii) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n est triangulaire supérieure. Déduisez-en les valeurs propres de u_n ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme u_n est-il diagonalisable ?

c) Nous munissons à présent E du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ suivant :

$$\forall P \in E, \forall Q \in E, \quad (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Vérifiez que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire E.

d) Soient $P \in E_n$ un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre λ, Q un élément quelconque de E_n. Montrez que la relation suivante est vérifiée :

$$\lambda(P|Q) = -\int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)Q'(x)dx.$$

Déduisez-en que si $P \in E_n$ et $Q \in E_n$ sont deux vecteurs propres de u_n associés respectivement à deux valeurs propres distinctes λ et μ, nous avons nécessairement $(P|Q) = 0$.

e) Pour tout $n \in N$, nous notons F_n le sous-espace orthogonal de E_n dans E_{n+1} pour le produit scalaire défini ci-dessus.
   (i) Quelle est la dimension de F_n ?

(ii) Montrez que F_n est, pour tout les endomorphismes u_k ($k \geqslant n+1$), le sous-espace propre associé à une valeur propre que vous préciserez

(iii) Soit $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ une suite d'éléments non nuls de E. Montrez que les deux conditions A et B suivantes sont équivalentes

(A) Pour tout $n \in N$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de vecteurs propres de u_n.

(B) La suite $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots)$ vérifie les deux conditions suivantes :

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de Q_n est égal à n.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, nous avons $(Q_n|Q_m)$=0.