T. D. n$^{\mathrm{o}}$ 6
Fonctions d'une variable réelle : intégration, formules de Taylor.

Exercice 1 : Inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes, épreuve 2, 2006.

Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}}\cdot$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel I, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}\cdot$$

2. Donner la forme générale des primitives de f sur I.
3. Donner la primitive F de f vérifiant $F(2) = 4$.
4. En déduire $\int_2^4 f(x)dx$.

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur des douanes et droits directs, 2005.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{n/2} \cos^n(x)dx$ et $J_n = \int_0^{n/2} \sin^n(x)dx$.

1. Montrer que $I_n = J_n$.

(*Indication* : on pourra s'aider d'un changement de variable adéquat)

Pour information : la question 1 est indépendante des questions 2, 3, 4, 5, 6.

2. a. Calculer I_0 et I_1.
   b. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
3. En distinguant les cas n pair et n impair, déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. a. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b. À partir d'un encadrement de I_{n-1}, déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{I_n}\cdot$
5. a. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}\cdot$
   b. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(I_n)^2 = \dfrac{\pi}{2}\cdot$
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n \left(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \right)^2 \right] = \dfrac{1}{\pi}\cdot$

Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 2 2007.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3+\cos(x)}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et justifier la continuité de f sur cet ensemble. En déduire que f admet des primitives sur tout intervalle fermé et borné de $\mathcal{D}$.

b) Pour tout $\alpha \in]0,\pi[$, déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_{[0,\alpha]}$ des primitives de f sur $[0,\alpha]$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_{[0,2\pi]}$ des primitives de f sur $[0,2\pi]$.

Exercice 4 : D'après le concours d'inspecteur des douanes et droits directs, 2005.

a) Déterminer les primitives suivantes :

(i) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$

b) Calculer les intégrales suivantes :

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(x)\,dx$

Exercice 5 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, 2006.

Donner la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{X+1}{(X-1)^4(X-2)^2}\,dX$.

Exercice 6 : D'après le concours de contrôleur des impôts, 2006.

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)\,dt.$$

Déterminer I et J en utilisant leur somme et leur différence.

Exercice 7 : D'après le concours d'inspecteur des douanes, 2007.

a) $\displaystyle\int_1^e \ln\left(1+\sqrt{x}\right)\,dx$
(on pourra utiliser une intégration par parties en posant

$$u(x) = \ln(1+\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad v(x) = x-1)$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties)

c) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{(1+\sqrt{x})}\,dx$ (on pourra effectuer un changement de variables)

d) $\displaystyle\int_1^9 \frac{x^2}{(x+3)}\,dx$

Exercice 8 : D'après le concours de contrôleur de l'INSEE, Décembre 2006.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $u \neq \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}.$$

b) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx$ (arrondir à 10^{-1} près).

Exercice 9 : D'après le concours externe d'inspecteur du trésor public, 2008.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e (\ln t)^n\,dt \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1) (i) Calculer I_1, puis montrer que $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$.
   (ii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = e(S_n+1)-1$.

2) (i) Démontrer que : $0 \leqslant \int_1^e (\ln t)^n\,dt \leqslant e-1$.
   (ii) En déduire que la suite I_n converge.

3) Déterminer la limite de la suite S_n.

Exercice 10 : D'après le concours externe d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2008.

A−Famille de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie par

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_n$, et les ensembles de continuité et de dérivabilité de f_n.
2. Déterminer les variations de f_n pour $n \geqslant 1$, puis construire le tableau de variation.
   Indication : on pourra être amené à distinguer le cas où n est pair du cas où n est impair.
   En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, l'unique élément $\alpha_n \in]0;1[$ tel que $f_n'(x) = 0$.
3. Effectuer l'étude sommaire des fonctions f_0, f_1 et f_2, puis représenter dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2.

B−Suite définie par une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x-1}dx$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+3)I_n = 2nI_{n-1} \quad (R)$$
3. À l'aide de (R), montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

Exercice 11 : D'après le concours externe d'inspecteur du trésor public, épreuve 2, 2005.
Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
À toute fonction f de $\mathcal{C}$, on associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

1. Déterminez la fonction g lorsque :
   a. f est la fonction identité $t \mapsto t$;

   b. f est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{9+t^2}}$.

2. Montrez que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimez sa dérivée à l'aide de f.

   a. Montrez que si f est impaire, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

   b. En déduire $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   c. Montrez que, si l est un nombre réel, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ entraîne que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$.

Exercice 12 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2005.
Soit $F(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$. On se propose d'étudier le comportement de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la fonction F est définie pour tout réel positif.
2. Montrer que F est une fonction impaire strictement croissante.
3. Soit $I_n = \int_1^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$, pour n entier naturel strictement positif. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ est une suite strictement croissante.
4. Soit $f(u) = u\exp(-u),\ u \geqslant 0$. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée $f'(u)$. En déduire que pour tout $u \geqslant 0,\ f(u) \leqslant \frac{1}{e}$.
5. Soit $J_n = \int_1^n \frac{dt}{t^2}$, pour n entier naturel strictement positif. Déduire de la question précédente que $I_n \leqslant \dfrac{2}{e}J_n$.
6. Calculer J_n pour tout n entier naturel strictement positif. En déduire que la suite $(I_n)_{n>0}$ est majorée et démontrer qu'elle converge vers une limite finie I quand n tend vers $+\infty$.
7. Soit la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ définie pour tout $x > 0$. Montrer que g est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée $g'(x)$. En déduire la relation :
$$g(x) - g(b) = \int_x^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,\ \text{pour } b > x > 0.$$
8. Soient m et n deux entiers naturels tels que $0 < n < m$. Démontrez l'inégalité :
$$I_m + g(m) < I_n + g(n).$$
9. Soit la fonction $h(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right)\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ définie pour tout $x > 0$. Montrer que h est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée $h'(x)$.

10. En déduire la formule $h(x) - h(b) = \displaystyle\int_x^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^4}\right) dt$ pour tout $b > x > 0$.
11. Démontrer l'inégalité $I_m + h(m) > I_n + h(n)$, pour m et n entiers naturels tels que $0 < n < m$.

Exercice 13 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2006.
On définit une application f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \text{ si } x \in]0;1[\cup]1;\infty[,\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

Préliminaire

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de l'application f. On rappelle qu'au voisinage de 0,
$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h),\ \text{avec } \epsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0.$$
2. Dresser le tableau de variation de f.

Première partie

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout x de $[0; +\infty[$.

1. Dire pourquoi F est définie sur $[0; +\infty[$.
2. Prouver que : $\forall x \in]0;1[$, $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln t}dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$. On admettra que ces intégrales sont bien définies car les fonctions $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont prolongeables par continuité en 0. On admettra également qu'il est possible de faire des changements de variable dans ces conditions.
3. Prouver que : $\forall x \in]0;1[$, $\forall t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x^2}$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$ que l'on notera L_0.
5. Prouver que l'on ne modifie par l'existence et la valeur éventuelles de [la limite] $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$ en remplaçant $\frac{1}{\ln t}$ par $\left(\frac{1}{\ln t} - \phi(t)\right)$ où ϕ est une application continue et bornée sur $]0,1[\cup]1;+\infty[$.
6. En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt$. On pourra considérer l'application $\phi(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ que l'on prolongera par continuité en 1. On vérifiera que cette fonction possède bien les propriétés requises pour pouvoir appliquer la question précédente. Calculer cette dernière limite que l'on notera L_1.

7. On définit une application G de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ si $x \in]0;1[\cup]1;\infty[$, $G_0 = L_0$ et $G(1) = L_1$. Prouver que $G = F$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Deuxième partie

Étudier et représenter graphiquement l'application $F(= G)$. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Troisième partie

On considère la fonction $I_y(x) = \int_x^y \frac{t-1}{\ln t} dt$.

1. Indiquer pour quelles valeurs de x et de y la fonction $I_y(x)$ est définie.
2. Effectuer le changement de variable $t = \exp(-u)$ en justifiant sa validité.
3. Montrer que la fonction obtenue est l'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité en 1.
4. Démontrer que : $\forall Y > 0$, $\int_1^Y \frac{\exp(-x)-\exp(-2x)}{x} dx = -\int_Y^{2Y} \frac{\exp(-x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{\exp(-x)}{x} dx$.
5. Montrer que la fonction $t \to \frac{\exp(-t)}{t}$ est majorée sur $[1;+\infty[$ par la fonction $t \to \exp(-t)$.
6. En déduire un encadrement de $J(x)$ sur $[1;+\infty[$ et en déduire que la fonction $J(x) = \int_1^x \frac{\exp(-t)}{t}$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
7. En déduire que $\lim_{Y\to+\infty} \int_Y^{2Y} \frac{\exp(-t)}{t} dt = 0$.
8. On se propose d'étudier de même pour $X > 0$, $\int_X^1 \frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{t} dt$ et [la limite] $\lim_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{\exp(-t)}{t} dt$.
   a. Montrer que la fonction $x \to \frac{1-\exp(-x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.
   b. En appliquant le théorème selon lequel toute fonction continue sur un segment fermé est bornée sur ce segment, montrer que $\lim_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{1-\exp(-t)}{t} dt = 0$.
   c. En déduire que $\lim_{X\to 0} \int_X^{2X} \frac{\exp(-t)}{t} dt = \ln 2$.
9. En déduire une seconde méthode de calcul de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 14 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2007.

Partie A

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$.

1. Calculer $f(0)$, $\int_0^1 f'(x)dx$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx$.
2. Étudier les variations de f et en déduire son maximum.

Partie B

Soit $f\ :\ [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(0)=0$, $\int_0^1 f'(x)dx = 0$ et $\int_0^1 |f'(x)|dx = 1$.

1. On suppose f croissante puis décroissante. Calculer le maximum de f.
2. Sans cette hypothèse, trouver une borne supérieure pour f.

Exercice 15 :
Soit la suite (I_n) définie par les relations :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{(1+t)}\,dt; \quad I_1 = \int_0^1 t\sqrt{(1+t)}\,dt; \quad \ldots; \quad I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{(1+t)}\,dt.$$

a) Calculer I_0 et I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b) Comparer t^n et t^{n+1} lorsque $0 \leqslant t \leqslant 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

c) Grâce à un encadrement de $\sqrt{(1+t)}$, établir que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

d) Montrer que pour tout réel t de $[0,1]$:

$$0 \leqslant \sqrt{2} - \sqrt{(1+t)} \leqslant \frac{1}{2}(1-t).$$

En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

Déterminer la limite de nI_n.

Exercice 16 : Divers.

1. Donner la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$.
2. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$.
3. Calculer les intégrales suivantes :

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$,

(ii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,dt$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{x^2\cos^2 t + \sin^2 t} \quad (x \in \mathbb{R}^*)$,

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t}$.

4. Pour tous entiers naturels p et q, on définit par $I_{p,q}$ l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt.$$

(i) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.

(ii) En déduire, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice 17 : Quelques intégrales généralisées à connaître.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
a) \displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} & (a>0) & b) \displaystyle\int_a^{\infty} \exp(-\alpha x)dx & (a \in \mathbb{R}, \alpha > 0) \\
c) \displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx & & d) \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx & \\
e) \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} & & f) \displaystyle\int_0^{\infty} x^n \exp(-x)dx & (n \in \mathbb{N}) \\
g) \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx & & h) \displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(x+r)} & (a>0, r>0) \\
i) \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1} & & j) J_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^n} & (n \geqslant 2 \text{ entier}).
\end{array}$$

Pour la dernière intégrale, on établira la relation de récurrence

$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n.$$

Exercice 18 : Un exemple d'intégrale divergente.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$ diverge par un calcul de primitive.

Exercice 19 : Un exercice d'intégrales qui dépendent d'un paramètre.

Étudier en fonction du paramètre réel α la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$a) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx \quad b) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \quad c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+(\ln x)^2)} \quad d) \int_0^1 \frac{\cos^\alpha(\pi x/2)}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$$

Exercice 20 : Un exercice sur les intégrales semi-convergentes.

Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

$$a) \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad b) \int_{-1}^{\infty} \cos(x^2) dx \quad (\text{poser } u = x^2) \quad c) \int_{\pi}^{\infty} x^2 \sin(x^4) dx.$$

Exercice 21 : $f \sim g$ et pourtant leurs intégrales ne sont pas de même nature.

Soit $a > 0$. On définit sur $[a; +\infty[$, les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot$$

a) Montrer que $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ n'ont pas la même convergence.

Exercice 22 : Un classique.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\exp(-x) - \exp(-2x)}{x} dx$.

a) Montrer que I est convergente.

b) Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $t = 2x$, la relation

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\exp(-x) - \exp(-2x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{\exp(-x)}{x} dx.$$

c) En déduire la valeur de I.

Exercice 23 : Un dernier pour la route.

Soit $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

a) Montrer que J est convergente et que l'on a $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$.

b) Montrer que $2J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)$.

c) En déduire la valeur de J.