# T. D. n$^{\text{o}}$ 14
# Équations différentielles.

**Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 2, 2006.**
Intégrer l'équation différentielle $(E)$ suivante :

$$y'' + 2y = \cos^2 x \quad (E).$$

**Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, épreuve 2, 2006.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + y' + y = 0 \tag{1}$$

avec $y(0) = y(\frac{\pi}{\sqrt{3}}) = 1$.

**Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes, épreuve 2, 2006.**
Soit l'équation différentielle : $\boldsymbol{y' = y + 2x - 3 \quad (1)}$.

1. Déterminer la seule fonction affine $g$ solution de (1).
2. Soit $y$ une solution de (1). On pose $h = y - g$.
   a. Montrer que $h$ est solution de l'équation différentielle :
   $$\boldsymbol{h' = h \quad (2)}.$$
   b. Résoudre (2) et en déduire les solutions de (1).
   c. Trouver la solution particulière de (1) vérifiant la relation $y(0) = 3$.
3. Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par : $\boldsymbol{2\exp(x) - 2x + 1}$.
   a. Étudier les variations de $f$ sur l'ensemble des réels.
   b. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. Dresser le tableau des variations de $f$.
   d. Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à $(C)$, la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé d'unité le centimètre.
   Étudier la position de $(C)$ par rapport à $(D)$.
   e. Représenter avec soin $(D)$ et $(C)$ pour les valeurs de $x$ comprises entre -3 et 2.

**Exercice 4 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{ch}(t).$$

**Exercice 5 :**
En posant $z = x + iy$, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} (1+t^2)x' &= tx + y + 2t^2 - 1 \\ (1+t^2)y' &= -x + ty + 3t \end{cases}$$

où les inconnues $x$ et $y$ sont des fonctions dérivables de la variable $t$.

**Exercice 6 :**
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - I_3)^2$.
3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ d'inconnue la fonction $X$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 7 :**
Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' &= 3x + y + e^{2t} \\ y'' &= 2x + 2y + 3e^{t}, \end{cases}$$

où les applications inconnues $x$ et $y$ sont deux fois dérivables selon la variable $t$.

**Exercice 8 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + y = \tan t^2.$$

**Exercice 9 :**

1. Montrer que la forme différentielle $\omega = (t+y)\mathrm{d}t + (t-y)\mathrm{d}y$ est exacte et déterminer une primitive de $\omega$.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$t + y + (t - y)y' = 0,$$

où l'inconnue $y$ est une fonction dérivable de la variable $t$.

**Exercice 10 :**

1. Montrer que l'application sh est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R}$. Nous notons argsh son difféomorphisme réciproque.
   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}(t) = \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation différentielle :

$$(t^2 + 1)y'' + ty' - q^2 y = 0$$

à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}x$.

**Exercice 11 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + |y| = 0.$$

**Exercice 12 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$(x^2 - x)y' = 1 - y^2,$$

où l'inconnue $y$ est une fonction dérivable de la variable $x$.

**Exercice 13 :**
Considérons l'équation différentielle

$$yy'' - 2y'^2 - y^2 = 0. \tag{2}$$

1. Soit $y$ une fonction jamais nulle. Nous posons $z = \frac{y'}{y}$. Montrer que $y$ est solution de (2) si et seulement si $z$ est une solution d'une équation différentielle à préciser.
2. Déterminer les solution maximales de (2).
3. Soit $I$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $y \ : \ I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Nous notons $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation polaire $\rho = y(\theta)$. Lorsque $\theta_0 \in I$, donner une condition nécessaire pour que le point de $(\mathcal{C})$ de paramètre $\theta_0$ soit un point d'inflexion.
   Donner une interprétation géométrique de la question 2.

**Exercice 14 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$xyy' - x^2 - y^2 - xy = 0,$$

où l'inconnue $y$ est une fonction de la variable $x$ de classe $\mathcal{C}^1$. Vous pourrez poser $z = \frac{y}{x}$.

**Exercice 15 :**
Considérons l'équation différentielle

$$(1 + t^3)y' = y^2 + t^2y + 2t, \tag{3}$$

où l'inconnue $y$ est une application dérivable de la variable $t$.

1. Montrer que $\phi \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; t \mapsto t^2$ est une solution particulière de (3).
2. Soit $y \;:\; I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, où $I$ est un intervalle d'intérieur non vide ne contenant pas -1 et tel que $y - \phi$ ne s'annule pas.
   En posant $u(t) = \dfrac{1}{y(t) - \phi(t)}$, montrer que sous cette hypothèse :
   $$(3) \leftrightarrow -u' = \frac{3t^2}{1+t^3}u + \frac{1}{1+t^3}. \tag{4}$$
3. Achever la résolution de cette équation différentielle.

**Exercice 16 :**
Résoudre l'équation différentielle :

$$(t + 1)y'' - 2y' - (t - 1)y = te^{-t},$$

en commençant par remarquer que $t \to e^t$ est une solution de l'équation homogène associée. Rechercher notamment les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Exercice 17 :**
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres n'appartiennent pas à $\{2ik\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $e^A - I_m$ est inversible.
2. Soit $B \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ une application continue, périodique de période 1. Montrer que le système différentiel $X' = AX + B(t)$ admet une unique solution périodique de période 1.

**Exercice 18 :**

1. Soit $I$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et
$$M \ : \ I \to R^2, \ t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$$
un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par l'origine. Montrer qu'il existe deux applications $\rho \ : \ I \to \mathbb{R}_+$ et $\theta \ : \ I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $t \in I, x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t))$ et $y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t))$ .
2. Déterminer les lignes du champ de vecteurs
$$V \ : \ \mathbb{R}^2 \to R^2, \ (x,y) \mapsto \left(-y - x(x^2+y^2), x - y(x^2+y^2)\right),$$
c'est-à-dire, en reprenant les notations de la première question, les arcs $M$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que pour tout $t \in I, M'(t) = V(M(t))$.