T. D. n° 8
Polynômes réels et complexes. PGCD, PPCM et théorème de Bezout.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur du trésor, épreuve 2, 2004.
Soit H l'ensemble des nombres complexes z défini par : $\Re(z) > 0$ et $\Im(z) > 0$ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 \in H \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in H$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(\rho_n, \theta_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z_n = \rho_n \exp(i\theta_n)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ et $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)$.
4. Déterminer les limites de $\Re(z_n)$ et $\Im(z_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : D'après inspecteur du trésor public, épreuve 2, 2007.
On considère, pour n entier supérieur ou égal à 2, le polynôme défini par $P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$.

1. À l'aide de la factorisation de P, démontrer que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right| = n$$
2. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, épreuve 2, 2005.
On appelle nombres premiers jumeaux un couple $(p, p+2)$ formé de deux nombres premiers.

1. Donnez cinq exemples de nombres premiers jumeaux.
2. On considère $(p, p+2)$ un couple de nombres premiers jumeaux.

a. Montrez que si $p+(p+2)$ est divisible par 12, alors p et $p+2$ sont chacun différents de 3.

b. Montrez que si le couple $(p, p+2)$ est tel que $p+(p+2)$ est divisible par 12, alors p et $p+2$ sont chacun différents de 3.

c. En déduire que $p+(p+2)$ est divisible par 12 lorsque p et $p+2$ sont premiers et que p est différent de 3.

Exercice 4 : D'après le concours d'Attaché statisticien ENSAI, 2008.
Dans [tout cet exercice], on considère un entier $n \geqslant 1$ et on note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 et z_1, z_2, $\ldots$, z_{n+1} les racines $(n+1)-$ème de l'unité.

1. Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \exp\left(i2\pi\frac{kj}{n+1}\right) = 0$.
1. Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} z_j^k = 0$.
3. Soit u_1, $\ldots$, u_{n+1}, $n+1$ réels tels que :

$$\forall j = 1, \ldots, n+1,\ u_j \leqslant 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} u_j = n+1.$$

   Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n+1$, $u_j = 1$.
4. Soient v_1, $\ldots$, v_{n+1}, $n+1$ nombres complexes tels que :

$$\forall j = 1, \ldots, n+1,\ |v_j| \leqslant 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{n+1} v_j = n+1.$$

   Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n+1$, $v_j = 1$.
5. On considère maintenant un polynôme P à coefficients complexes de degré n et tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \text{ et } \forall z \in D, P(z) \in D.$$

   a. Montrer que $\sum_{j=1}^{k+1} z_j P(z_j) = n+1$.

   b. En déduire que pour tout $j = 1, \ldots, n+1$, $z_j P(z_j) = 1$.

   c. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^n$.

Exercice 5 : D'après le concours de l'EN3S, 2007.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

(a) $A_0 = 1$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ A'_{n+1} = A_n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^t A_n(t)dt = 0.$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme A_n existe et est unique. Déterminer le degré de A_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on a $A_n(0) = A_n(1)$.
3. Soit $a_n = A_n(0)$. Montrer que $A_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} X^k$.
4. Soit B_n le polynôme défini par $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = A_n$.
5. Déterminer a_{2p+1} et $a_{2p+1}(1/2)$, pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 1$. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 1$, A_{2p+1} est divisible par $X(X-1)(2X-1)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = X^n/n!$.
   En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{p} k^n = n!\left(A_{n+1}(p+1) - a_{n+1}\right).$$
7. En utilisant ce qui précède, trouver l'expression la plus simple possible de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.