T. D. n° 1
Normes sur un espace vectoriel. Topologie.

Exercice 1 : Attaché de l'INSEE, 2006.
Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On considère l'application $N_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ qui à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général a_{ij} associe $N_\infty(A) = \max_{ij} |a_{ij}|$.

Première partie

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $N_\infty(P)$.
2. Montrer que pour tout λ réel et pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(\lambda A) = |\lambda| N_\infty(A)$.
3. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(A+B) \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$.
4. Montrer que $N_\infty(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Deuxième partie

Soit $R = \lambda I_n + N$, $\lambda \in \mathbb{N}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$ et I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $I, N, \ldots, N^{n-1}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer R^2 et R^3.
3. Montrer que pour tout entier naturel $q \geqslant n$,
$$R^q = \lambda^q \left(I + \frac{C_q^1}{\lambda} N + \frac{C_q^2}{\lambda^2} N^2 + \cdots + \frac{C_q^{n-1}}{\lambda^{n-1}} N^{n-1} \right),$$
où $C_q^k = \dfrac{q!}{k!(q-k)!}$.
4. Calculer $N_\infty(R^q)$, $q \geqslant n$.
5. Montrer que $[N_\infty(R^q)]^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{q \to +\infty} |\lambda|$. On admettra pour cela que C_q^{n-1} est équivalent à $\dfrac{q^{n-1}}{(n-1)!}$ lorsque q tend vers l'infini.

Exercice 2 : D'après un Sujet blanc EN3S, 2009.
Nous considérons dans $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les normes définies pour $X(x, y)$ par :

$$\|X\|_1 = |x| + |y| \text{ et } \|X\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

a) Déterminez deux réels positifs, α et β, tels que :

$$\alpha\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_1 \leqslant \beta\|X\|_\infty.$$

b) Pour a et b réels, posons $N(X) = a\|X\|_1 + b\|X\|_\infty$ puis $X_1 = (1, 0)$, $Y_1 = (0, 1)$, $X_2 = (1, 1)$ et $Y_2 = (-1, 1)$. Calculez $N(X_1)$, $N(Y_1)$, $N(X_2)$ et $N(Y_2)$. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme est :

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Nous supposerons que cette condition est vérifiée par la suite.

c) Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Pour toute norme, nous appelons boule de centre O et de rayon R, et nous notons $\mathcal{B}(\mathrm{O},R)$, l'ensemble des points M tels que $\|\mathrm{O}M\| \leqslant R$. Montrez que $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ implique $[AB] \in \mathcal{B}$.

d) La sphère unité étant l'ensemble des points M tels que $\|\mathrm{O}M\| = 1$, construire sur un même repère, en indiquant leurs éléments de symétrie, les sphères unités $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_\infty$ et $\mathcal{S}_N$ dans le cas où $a = b = 1/2$.

e) Nous notons $\mathcal{B}_1(\mathrm{O}, R)$, $\mathcal{B}_\infty(\mathrm{O}, R)$ et $\mathcal{B}_N(\mathrm{O}, R)$ les boules de centre O et de rayon R pour les normes respectives $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et N. Montrez qu'il existe un nombre R tel que :

$$\mathcal{B}_1(\mathrm{O}, R) \subset \mathcal{B}_N(\mathrm{O}, 1) \subset \mathcal{B}_\infty(\mathrm{O}, R).$$

Exercice 3 : Équivalence de normes.
Notons E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les normes de la convergence en moyenne, de la convergence en moyenne quadratique et de la convergence uniforme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons f_n l'élément de E défini par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 2nt, & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ -2nt + 2, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

En étudiant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que les trois normes sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 4 : Équivalence de normes.
Nous notons $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, nous posons $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 5 : Normes p.
Soit p un réel strictement positif. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nous posons

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Si $0 < p < 1$, montrer que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.
2. Nous supposons que $p > 1$.
   a. Soit q le nombre réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout $x, y \geqslant 0$ nous avons :
   $$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\cdot$$
   b. Déduire de la question précédente que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous avons l'inégalité suivante, appelée inégalité de Hölder :
   $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\|_p + \|y\|_q.$$
   c. Montrer l'inégalité de Minkowski :
   $$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$
   En déduire que $\|\cdot\|$ est une norme.
3. Montrer que pour tous $q > p > 0$, nous avons les inégalités optimales :
   $$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|x\|_q.$$
4. Montrer que pour tout $p > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons les inégalités optimales :
   $$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$$
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
   $$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 6 : Parallélogramme.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé. Nous supposons que la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire que nous avons :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Nous allons montrer que la norme de E est une norme euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire f sur E tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = f(x,x)$.

1. Soit $f : E^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.
   Montrer que :
   a. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ f(x+y,z) + f(x-y,z) = 2f(x,z)$.
   b. $\forall (x,z) \in E^2,\ f(2x,z) = 2f(x,z)$.
2. Montrer que $\forall (u,v,z) \in E^3,\ f(u,z) + f(v,z) = f(u+v,z)$.
3. Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 7 : Ouvert.
Montrer que :

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \ln\left(x^2+y^2+1\right)\sin z < \exp x + z \text{ et } x+y-z > 1\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : Boules ouvertes.
Montrer que les boules ouvertes d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Exercice 9 : Espace normal.
Soit A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé telles que $d(A,B) > 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 10 : Adhérence d'une union.
Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E (avec $n \geqslant 2$), montrer que :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

2. Ce résultat est-il encore valable pour la réunion d'une infinité de parties de E ?

Exercice 11 : Quelques propriétés.
A est un ouvert d'un espace vectoriel normé E et B une partie de E.

1. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
3. Si B est dense dans E, montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.
4. Si A et B sont denses dans E, montrer que $A \cap B$ est dense dans E.
5. Donner un exemple de deux parties denses dans un espace vectoriel normé, dont l'intersection n'est pas dense.

Exercice 12 : Partie convexe.
Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont aussi convexes.

Exercice 13 : Sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

1. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ différent de 0.
   a. Montrer que nous pouvons définir $a = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.
   b. Montrer que si $a > 0$ alors $G = a\mathbb{Z}$.
   c. Montrer que si $a = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
   d. Un point $x \in G$ est isolé s'il existe un intervalle ouvert dans lequel x est le seul élément de G. L'ensemble G est dit discret si tous ses éléments sont isolés. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$ pour que G soit discret.
2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Posons $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm | (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
   Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est discret si et seulement si $\frac{a}{b}$ est rationnel.

Exercice 14 : Somme de deux parties.
Soit E un espace vectoriel normé et F et K deux parties de E.
Nous posons $F + K = \{f + k | (f, k) \in F \times K\}$.

1. Montrer que si F est ouverte alors $F + K$ est ouverte.
2. Montrer que si F et K sont compactes, alors $F + K$ est compacte.
3. Montrer que si F est fermée et K est compacte, alors $F + K$ est fermée. Donner des exemples de deux fermés de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas un fermé, vous pourrez, par exemple, utiliser la question 2. de l'exercice 11.

Exercice 15 : Application strictement contractante.
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé et K est un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application telle que pour tout $(x, y) \in K^2$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
Montrer qu'il existe un unique $l \in K$ tel que $f(l) = l$.

Exercice 16 : Espace vectoriel normé non complet.
Munissons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence en moyenne.

1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, nous notons f_n l'élément de E défini par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), & \forall t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 1, & \forall t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

   Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 3}$ est une suite de Cauchy de E.
2. Montrer que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice 17 : Application linéaire et continuité.
Notons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et soit $\phi : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$.
Étudier la continuité de ϕ pour les normes de la convergence uniforme et de la convergence en moyenne. Lorsque ϕ est continue, calculer sa norme.

Exercice 18 : Fonctions périodiques.
Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique est uniformément continue.

Exercice 19 : Fermé.
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\Phi : E \to E,\ f \mapsto g \circ f$. Montrer que Φ est continue.
2. Montrer que $A = \{f \in E | \forall x \in [0,1],\ 2f(x) + 1 \geqslant \exp f(x)\}$ est un fermé.