T. D. n$^{\text{o}}$ 3
Suites numériques. Limite d'une suite numérique.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur du trésor, épreuve 2, 2004.

1. Étudier la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\cdot$
2. Montrer qu'il y a un unique couple (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$x^y = y^x \text{ et } x < y.$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose : $U_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln n}{n}\cdot$
   a. Comparer U_n à $\int_3^{n+1} f(x)dx$.
   b. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\geqslant 3}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur des douanes et droits directs, 2007.
On considère la suite (u_n), avec n entier naturel, définie par : $u_{n+1} = 4u_n - 1$ et $u_0 = 2$. De plus, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - (1/3)$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner sa raison.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. Utiliser le résultat précédent pour exprimer S_n en fonction de n.

.

Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes des 10 et 11 avril 2006.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{15 + u_n} - 3$.

1. Quelle condition u_n doit-il vérifier pour que u_{n+1} existe ?
2. Dans cette partie, on a $u_0 = 2006$.
   (i) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.
   (ii) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   (iii) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Dans cette partie, on a u_0 est compris entre -15 et 1 exclu.

(i) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 1.
On admet que la suite (u_n) est croissante.

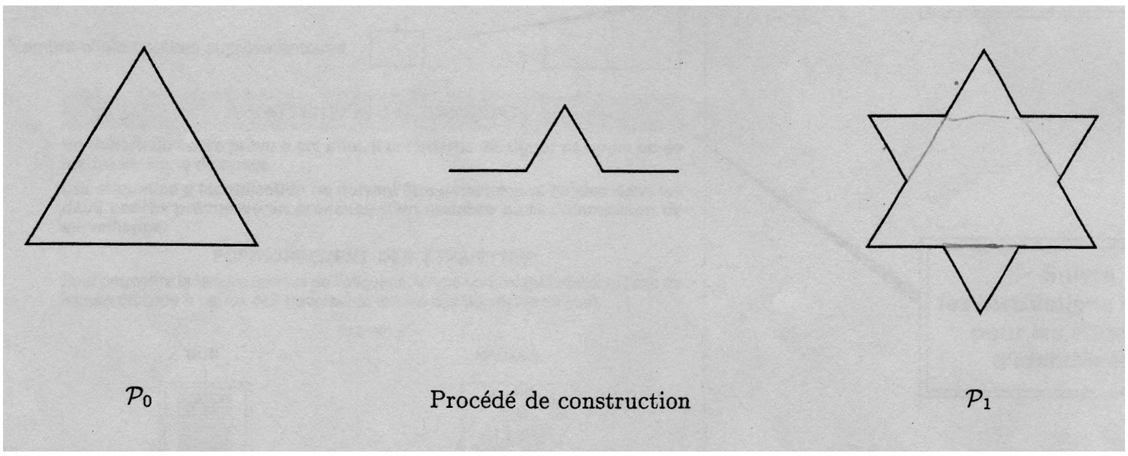
(ii) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

4. Comment qualifie-t-on cette suite si $u_0 = 1$? Justifier.

Exercice 4 : D'après le concours d'inspecteur de la concurrence, de la consommation et de la répression des fraudes des 20 et 21 février 2007.
Soit a et b deux réels non nuls tels que $a + b \neq 0$.
On pose $u_1 = a + b$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = a + b - \dfrac{ab}{u_n}\cdot$

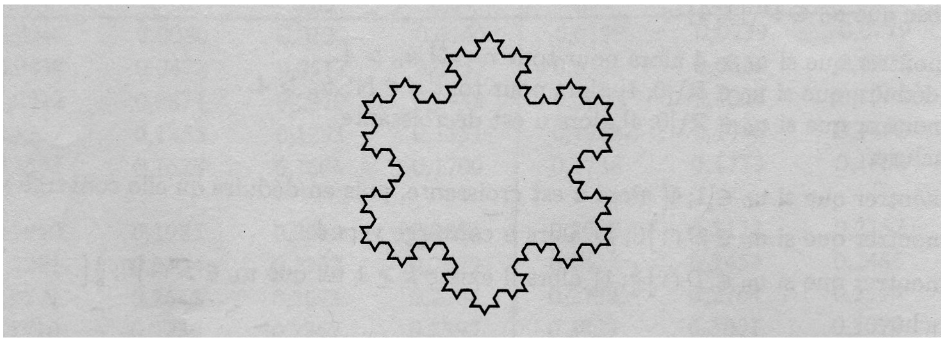
1. On suppose $a = b$.
   (i) Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de a.
   (ii) En déduire la forme générale de u_n en fonction de n.
   (iii) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
2. On suppose $a \neq b$.
   (i) Montrer par récurrence que, pour $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}\cdot$
   (ii) Si $a < b$, écrire u_n en fonction de $\dfrac{a}{b}$ et de n. En déduire la limite de la suite (u_n).
   (iii) Procéder de même si $a > b$.

Exercice 5 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3 2007.
Soit $\mathcal{P}_0$ un triangle équilatéral de côté $l = l_0$. On divise chaque côté en trois segments de même longueur l_1. On construit sur chaque segment médian un triangle équilatéral de côté l_1.
On obtient le polygone $\mathcal{P}_1$:



On itère indéfiniment ce processus de construction et on note $\mathcal{P}_n$ le polygone obtenu après la $n-$ième application du procédé de construction. On note c_n le nombre de côtés de $\mathcal{P}_n$, l_n la longueur de ses côtés, p_n son périmètre et $\mathcal{A}_n$ son aire.

1. Calculer c_n, l_n et $\mathcal{A}_n$ pour $n = 0, 1, 2$.
2. Démontrer que c_{n+1} et c_n sont liés par une relation de récurrence, puis en déduire c_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que l_{n+1} et l_n sont liés par une relation de récurrence, puis en déduire l_n en fonction de n et l pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer p_n en fonction de n et l, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.
5. On pose $u_n = \mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer $u_0 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0$ et $u_1 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$.
   b. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$, puis calculer u_n en fonction de n et l pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c. En déduire $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et l pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de polygones de périmètres plus grands que 10^n et d'aires plus petites que 1.



Exercice 6 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, épreuve 2 2005.

Soit a un réel positif donné.

1. Montrez que l'on définit une suite réelle (u_n) en posant $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = \frac{2\sqrt{u_n}}{1 + u_n}$$
2. a. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la suite (u_n) est-elle constante ?
   b. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la suite (u_n) est-elle convergente ? Précisez la limite éventuelle.

Exercice 7 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, épreuve 2 2005.

1. Une banque propose un placement à un taux d'intérêts composés de 6% par an. M. Martin place 15000 euros. Calculez la somme dont il disposera dans cinq ans.
2. M. Bernard se voit proposer un placement « dit à intérêts cumulés » qui lui rapporterait 34% sur cinq ans. Indiquez en le justifiant si le placement de M. Bernard est plus intéressant que celui de M. Martin.
3. Déterminez le pourcentage moyen annuel du placement proposé à M. Bernard.
4. Calculez à quel taux d'intérêts composés aurait dû être placé le capital de M. Bernard pour doubler au bout de cinq ans.

Exercice 8 : Attaché statisticien ENSAI, 2008.
Dans tout [cet exercice], a est un réel strictement positif fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_a(x) = \frac{a(1+a^2)}{1+x^2}.$$

1. Donner le tableau des variations de f_a et tracer sa courbe représentative.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_a(x) = x$.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_a(x) = a$.
3. Dans cette question, on prend $a = 1$.
   a. Calculer $f_1 \circ f_1(x)$.
   b. Montrer que l'équation $f_1 \circ f_1(x) = x$ équivaut à une équation de la forme $P_1(x) = 0$ où P_1 est un polynôme de degré 5 que l'on calculera.
   c. Vérifier que 1 est racine multiple de l'équation $P_1(x) = 0$. Quel est son ordre de multiplicité ?
   d. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_1 \circ f_1(x) = x$.

   Dans toute la suite, on considère une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u \geqslant 0$ donné et $u_{n+1} = f_a(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On posera enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
4. a. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones et que l'une de ces deux suites est croissante et l'autre est décroissante.
   b. Montrer que tous les termes de l'une de ces deux suites sont supérieurs ou égaux à a et que tous les termes de l'autre suite sont inférieurs ou égaux à a.
   c. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
5. Dans cette question, on prend $a = 1$.
   a. Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite que l'on précisera. (On pourra utiliser les questions 3. et 4.)

b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

6. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.

a. Calculer $f_a'(a)$.

b. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a-\delta; a+\delta],\ |f_a'(x)| \geqslant 1.$$

c. On suppose, dans cette de la question, que la suite (u_n) converge. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \in [a-\delta; a+\delta] \text{ et } |u_n - a| \geqslant |u_{n_0} - a|.$$

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers a si et seulement si $u_0 = a$.

7. On suppose maintenant que $0 < a < 1$.

a. Calculer $f_a \circ f_a(x)$.

b. Montrer que l'équation $f_a \circ f_a(x) = x$ équivaut à une équation de la forme $P_a(x) = 0$ où P_a est un polynôme de degré 5 que l'on calculera.

c. Montrer qu'il existe un polynôme Q_a de degré 4 tel que $P_a(x) = (x - a)Q_a(x)$.

d. Étudier les variations de $Q_a(x)$ pour $x \geqslant a$ et montrer que l'équation $f_a \circ f_a(x) = x$ possède une seule racine réelle supérieure ou égale à a.

e. Montrer, en utilisant les résultats de la question 4., que la suite (u_n) converge vers a.

Exercice 9 :
Soient S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n,$$

et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite élément de S telle que

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 2.$$

1. Déterminer les racines α, β et γ de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
2. (i) Montrer que S est un espace vectoriel, puis que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de S.

   (ii) Soit f l'application qui à tout élément u de S associe $f(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que f est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^3$.

   (iii) En déduire $\dim S$, puis une base de S.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 10 : Calcul de limites.

1. Après avoir déterminé un équivalent, calculer la limite de la suite
$$\left(\frac{6n^3+3n^2+4n+1}{2n^3-5n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$
2. Déterminer la limite de la suite
$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$ converge et déterminer sa limite.
4. Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}\cdot$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]0,1[$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0.$$
6. Soient a et b deux réels positifs tels que $a > b$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\cdot$$
7. Soient a et b deux réels non nuls. Déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :
$$u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)}\cdot$$
8. (i) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
   (ii) En déduire
$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\cdot$$

Exercice 11 : Suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
Étudier les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. $t_0 \in \mathbb{R}^-$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n^3 + 3t_n - 3$,
2. $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$,

3. $v_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - v_n^2$,
4. $v_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n^2 - 2w_n + 2$.

Exercice 12 : Équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$·

1. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}\cdot$$

2. En déduire un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$·

Exercice 13 : Suites définies par la relation $u_n = f(n)$. Suites adjacentes.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

(i) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}\cdot$$

(ii) Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) et montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite.

2. Soit a un entier naturel et f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soient alors $(u_n)_{n\geqslant a}$ et $(v_n)_{n\geqslant a}$ les suites définies par :

$$\forall n \in [a, +\infty[, u_n = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^n f(t)dt$$

et

$$\forall n \in [a, +\infty[, v_n = \sum_{k=a}^{n} f(k) - \int_a^{n+1} f(t)dt.$$

(i) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall k \in [a, +\infty[, f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k).$$

(ii) Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) et montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 14 : Suites définies comme solution d'une équation.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - e.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(x_n) = 0.$$

2. En considérant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)$ déterminer le sens de variation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.