T. D. n$^{\text{o}}$ 4
Séries numériques et séries entières.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, 2000.
ln désigne le logarithme népérien.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on note } u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\dfrac{1}{2n^2}$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$?
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge.
   On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve numéro 3, 2004.
Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 3 :
Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}.$$

Exercice 4 :
Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Exercice 5 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve numéro 2, 2004.
À partir de l'expression de la fonction arctan[(1)], dérivée première de la fonction arctan, trouver le développement en série entière de la fonction arctan et en déduire la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Exercice 6 :
Calculer la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 7 :
Nature des séries de termes généraux :

a) $\dfrac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^a}$;

b) $\dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$.

Exercice 8 :
Nature de la série de terme général : $v_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Exercice 9 :
Nature de la série de terme général : $v_n = \cos(\pi n^2(\ln(n-1) - \ln(n)))$.

Exercice 10 :
Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général : $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

Exercice 11 :
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n^2)$.

Exercice 12 :
Étudier la série dont le terme général u_n est défini par $u_0 = 1$ et la relation : $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

Exercice 13 :
Étudier la série dont le terme général u_n est défini par $u_1 > 0$ et la relation : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} \exp(-u_n)$.

Exercice 14 :
Nature et somme de la série de terme général :

$$\arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

Exercice 15 :
Nature et somme de la série de terme général :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) \tan\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^2.$$

Exercice 16 :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n^2-p^2} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}.$$

Exercice 17 :

Soit $q \in N^*$, convergence et somme de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, avec $u_k = \dfrac{k - qE\left(\frac{k}{q}\right)}{k(k+1)}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 18 :
Montrer que $\cos 1$ est irrationnel.

Exercice 19 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve numéro 2, 2001.

Deuxième partie

1°) On donne la série entière de terme général : $w_m(x) = \dfrac{(-1)^m x^m}{m!(\sqrt{2})^{m^2}}, m \in \mathbb{N}$.

On désigne par $F(x)$ la somme, quand elle existe de cette série.

a) Montrer que cette série entière a un rayon de convergence infini.

b) Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \sqrt{2}]$.

c) Montrer que $F(2\sqrt{2}) < 0$.

d) Montrer que la fonction F est dérivable et que l'on a : $F'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} F\left(\dfrac{x}{2}\right)$, pour tout x réel.

e) En déduire l'existence et l'unicité du réel α vérifiant

$$\begin{cases} \alpha \in \left]0, 2\sqrt{2}\right[\\ F(\alpha) = 0. \end{cases}$$

2°) a) Montrer que $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2^m}\right) > -\dfrac{1}{2^{m-1}}$ pour tout entier strictement positif m

(ln désigne la fonction logarithme népérien)

b) En déduire que la suite (u_m) définie par $u_0 = 1$ et $u_m = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \dfrac{1}{2^i}\right)}, m \in \mathbb{N}^*$, converge.

(Rappel : $\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \dfrac{1}{2^i}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{2^1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{2^m}\right)$)