T. D. n$^{\text{o}}$ 7
Suites et séries de fonctions.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 2, 2008.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction s_n définie par :

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 & s_n(0) = n^2 \\ \forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[& s_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} \end{cases}$$

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x)\, dx$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que s_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis que s_n est minorée sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$.
   Indication :
   On démontrera que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.
3. Soit Ψ une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\Psi(0) = 0$.
   On pose
   $$u_n = \frac{1}{I_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi(x) s_n(x)\, dx$$
   (i) Montrer que pour tout $\varepsilon >$, il existe $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ tel que $\sup\limits_{t\in[0,\eta]} |\Psi(t)| < \dfrac{\epsilon}{2}$
   (ii) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Démontrer que si f est une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{I_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) s_n(x)\, dx = f(0)$$

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2007.
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x}$$

On définit formellement la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions composées par :

$$\begin{cases} f^0 &= Id \\ f^n &= f \circ f^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de définition de la fonction f^n. En particulier $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}$.

A– Étude des fonctions f^n, $n \geqslant 1$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_1$ de la fonction $f^1 = f$, puis l'ensemble de définition $\mathcal{D}_2$ de la fonction f^2.
2. Démontrer que $x \in \mathcal{D}_n$ si et seulement si $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $x \in \mathcal{D}_{n-1}$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{R} \setminus [0;1[\subset \mathcal{D}_n$$
Indication : considérer $x < 0$, puis $x \geqslant 1$.
4. Étudier les variations de f sur $]0;1[$, puis en déduire les variations de f^n sur $]0;1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n \in]0;1[$ tel que $f^n(x_n) = 0$.
6. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. En déduire qu'elle converge vers $l \in \left]\frac{4}{5};1\right]$.

B– Suite récurrente

Avec les notations de la partie précédente on pose :
$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^* \setminus \{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}.$$
On fixe $u_0 \in \mathcal{D}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que si u converge alors sa limite appartient à $\{1;4\}$.
2. Étudier la suite u lorsque le premier terme est $u_0 = 1$, puis lorsque $u_0 = 4$.
3. On suppose que $u_0 \in \mathcal{D} \setminus \{1;4\}$.
   a. Démontrer que si $u_0 > 4$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4$.
   En déduire que si $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0;4]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 4$.
   Démontrer que si $u_0 \in \mathbb{R} \setminus [0;4]$ alors u est décroissante.
   Conclure.
   b. Démontrer que si $u_0 \in \mathbb{R}\setminus]1;4[$ alors u est croissante, puis en déduire qu'elle converge vers 4.
   c. Démontrer que si $u_0 \in \mathcal{D}\cap]0;\frac{4}{5}[$ alors u converge vers 4.
   d. Démontrer que si $u_0 \in \mathcal{D}\cap]\frac{4}{5};1[$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $u_k \in \mathcal{D}\cap]0;\frac{4}{5}[$.
   e. Conclure.

Exercice 3 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2009.

1re partie

On considère les suites téelles $(u_n)_{\mathbb{N}}^*$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}^*$ définies par :

$$u_1 = v_1 = 1$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. Montrer que l'on a $v_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que l'on a $u_n \leqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

2e partie

On considère les fonctions numériques C_n et S_n de la variable réelle t et de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $[0;\pi]$ par :

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

1. a. Montrer que l'on a $C_n(0) = n$ et $S_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b. On pose $K_n(t) = C_n(t) + iS_n(t)$. Montrer que pour tout t non nul $K_n(t) = \exp(it)\dfrac{1 - \exp(int)}{1 - \exp(it)}$.
   c. Déduire de ce qui précède que si t est non nul alors :
   $$C_n(t) = \frac{\cos\dfrac{(n+1)t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(t) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$
   d. Montrer que les fonctions C_n et S_n sont continues sur $[0;\pi]$.
2. On considère la fonction numérique g_n de la variable réelle t définie sur $[0;\pi]$ par :
   $$g_n(t) = 2C_n(t) + 1.$$
   Montrer que si t est non nul alors $g_n(t) = \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}$.
3. Soit n un entier positif non nul.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

b. En déduire que $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} h(t)C_n(t)dt$ où h est une fonction que l'on déterminera.

c. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{h(t)}{2}dt$.

d. En déduire que $u_n - \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} h(t)g_n(t)dt$.

3^e^ partie

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0;\pi]$ par :

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{\left(t - \dfrac{t^2}{2\pi}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \text{ si } t \text{ est non nul.}$$

1. a. Montrer que la fonction f est continue sur $[0;\pi]$.
   b. Montrer que l'on a : $\forall t \in [0;\pi],\ f(t) \geqslant 0$.
2. On considère u un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Montrer que $\sin u - u + \dfrac{u^3}{6} \geqslant 0$.
   b. En déduire que $1 - \dfrac{u^2}{6} \leqslant \dfrac{\sin u}{u} \leqslant 1$.
   c. En posant $u = \dfrac{t}{2}$, montrer que $1 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{48}{24-\pi^2}$, pour tout réel t de l'intervalle $]0;\pi]$.
3. On pose $M = \dfrac{48}{24-\pi^2}$ et on considère λ un réel de l'intervalle $]0;\pi[$.
   a. Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^{\lambda} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\right| \leqslant \lambda M$ pour tout entier naturel n.
   b. Montrer que $|f'(t)| \leqslant M'_\lambda$ pour tout réel t de l'intervalle $[\lambda;\pi]$ avec $M'_\lambda = \dfrac{1+\dfrac{\pi}{2}}{\sin^2\dfrac{\lambda}{2}}$.
4. On pose à présent $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0;\pi[$.
   a. Montrer que $|I_n| \leqslant \dfrac{2\left[M + M'_\lambda(\pi-\lambda)\right]}{2n+1}$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2003.
Soit $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos^n(t)}$. On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ le domaine de définition de $I_n(x)$.

1. L'intégrale $I_n(x)$ est-elle bien définie sur I ?
2. Soit la fonction $f(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ (ln désigne le logarithme népérien et tan la fonction tangente). Montrer que f est définie et dérivable sur I.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f pour tout $x \in I$.
4. Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$ pour tout $x \in I$.
5. Établir une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-2}(x)$ pour tout $n \geqslant 2$.
6. En déduire $I_3(x)$.

Exercice 5 : D'après un Sujet blanc EN3S, 2009.

a) Soit deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$(H) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}\cdot$$

Soit $k = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\cdot$

(i) Montrez que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant k v_n$.

(ii) Quelle implication peut-on alors écrire entre les propriétés $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge ?

b) (i) Donnez le développement en série enrière de la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ à l'origine sous la forme $\sqrt{1+x} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et précisez le rayon de convergence.

(ii) Soit $\alpha > 0$, $u_n = |a_n|$ et $v_n = n^{-\alpha}$.
Calculez un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\cdot$
Par un choix convenable de α, montrez que la série $\sum u_n$ converge.

(iii) Montrez que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[-1; 1]$.

(iv) Montrez que : $\forall x \in [-1; 1], \sqrt{1+x} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

(v) Montrez qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ vers la fonction f définie sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ par $f(t) = |t|$.

Exercice 6 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2004.
Dans tout le problème, on note $\mathcal{C}^0([0; 1])$ l'ensemble des applications continues de $[0; 1]$ dans le corps des réels $\mathbb{R}$.

Première partie

On définit sur $\mathcal{C}^0([0;1]) \times \mathcal{C}^0([0;1])$ l'application D par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([0;1]) \times \mathcal{C}^0([0;1]),\ D(f,g) = \sup_{[0;1]} |f(x) - g(x)|.$$

1. Justifier l'existence de D.
2. Pour $(f,g) \in \mathcal{C}^0([0;1]) \times \mathcal{C}^0([0;1])$, que signifie $D(f,g) = 0$?
3. Montrer que D est symétrique, c'est-à-dire que :
$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([0;1]) \times \mathcal{C}^0([0;1]),\ D(f,g) = D(g,f).$$
4. Montrer que D vérifie l'inégalité triangulaire :
$$\forall (f,g,h) \in \mathcal{C}^0([0;1]),\ D(f,g) \leqslant D(f,h) + D(h,g).$$
On a ainsi défini une distance sur l'ensemble des fonction continues sur $[0;1]$.
5. On définit les fonctions f et g suivantes, pour $x \in [0;1]$: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Calculer $D(f,g)$. Tracer les graphes de f et g et représenter graphiquement $D(f,g)$.

Deuxième partie

1. Montrer que :
$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([0;1]),\ \left| \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \right| \leqslant D(f,g).$$
2. On définit sur $[0;1]$ la suite de fonctions de $\mathcal{C}^0([0;1])$ par $f_n(x) = \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n}$, où n est un entier naturel non nul. Θ désignant l'application nulle, et f_n' la dérivée de f_n, montrer que :
$$\forall n > 1,\ D(f_n, \Theta) = \frac{1}{n} \text{ et } D(f_n', \Theta) = n.$$

Troisième partie

L'objet de cette partie est d'étudier une suite de polynômes P_n et sa convergence vers une application f de $\mathcal{C}^0([0;1])$, la convergence étant définie par : $\lim_{n\to+\infty} D(f, P_n) = 0$.

1. On note par f l'application de $\mathcal{C}^0([0;1])$ définie par :
$$f(x) = \frac{2}{2+x}\cdot$$
Pour n entier naturel, on définit le polynôme P_n élément de $\mathcal{C}^0([0;1])$ par :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k,\ \text{pour tout } x \text{ de } [0\,;1].$$
Établir que $D(P_n, f) = \dfrac{1}{3 \cdot 2^n}\cdot$

2. On prend pour f la restriction à $[0;1]$ de la fonction exponentielle, et on définit pour tout entier naturel n la suite de polynômes P_n de $\mathcal{C}^0([0;1])$ par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \text{ pour tout } x \text{ de } [0\,;1]$$

avec la convention $0! = 1$.

   a. Démontrer que $\exp(x) - P_n(x) = J(n,x)$ où $J(n,x) = \int_0^x \left[\frac{\exp(t)(x-t)^n}{n!}\right] dt$.

   b. En déduire que $D(P_n, f) \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.

   c. À partir de quel rang la distance est inférieure à 10^{-3} ?

3. Dans cette question, on prend pour f la restriction de la fonction sinus à $[0;1]$. La suite P_n de polynômes de $\mathcal{C}^0([0;1])$ est définie par récurrence de la façon suivante,
Pour tout x de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= 3P_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left[P_n\left(\frac{x}{3}\right)\right]^3. \end{aligned}$$

   a. Donner les formes explicites des polynômes $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

   b. On définit l'application T sur $[-1;1]$ par : $\forall x \in [-1;1]$, $T(x) = 3x - 4x^3$. Étudier les variations de T. Montrer que pour tous $(u,v) \in [-1;1]$, $|T(u) - T(v)| \leqslant 9|u-v|$.

   c. Établir la formule : $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.

   d. Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

   e. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ P_n(x) \in [-1;1]$$

   et

$$|P_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{x^3}{2 \cdot 3^n}.$$

Courbes paramétrées

Exercice 7 : Inspecteur des impôts, épreuve 2, 2006.
Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on nomme Γ_1 et Γ_2 les courbes planes paramétrées représentatives des systèmes de coordonnées suivants :

$$\Gamma_1 \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2t} \\ y & = & \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right. \qquad \Gamma_2 \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t + \dfrac{1}{t} \\ y & = & \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que Γ_1 se déduit aisément de Γ_2 par une transformation simple du plan que l'on précisera.
2. Dans toute la suite, on se limite alors à l'étude de Γ_2 et l'on désigne par $M(t)$ le point courant de Γ_2 de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
   a. Préciser le domaine de définition D du point $M(t)$.
   b. Montrer que pour $t \neq \dfrac{1}{2}$ et $t \neq 1$, le point $M(t)$ est un point ordinaire de la courbe Γ_2 tel que $\det\left(\overrightarrow{OM'(t)}, \overrightarrow{OM''(t)}\right) \neq 0$.
   c. Préciser la nature des points $M\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $M(1)$ ainsi que la valeur de la tangente à Γ_2 en ces points.
   d. Rechercher les points de Γ_2 à tangente verticale.
   e. Montrer que Γ_2 coupe l'axe des abscisses en un point que l'on précisera et qu'elle ne coupe jamais l'axe des ordonnées.
3. On note $m(t)$ la pente de la tangente à Γ_2 au point $M(t)$.
   a. Établir l'expression de $m(t)$.
   b. Montrer alors que la quantité $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ est du signe de $x'(t)m'(t)$ puis établir l'expression de $x'(t)m'(t)$.
   c. En déduire, suivant les valeurs de t, dans quelle direction le courbe Γ_2 tourne sa concavité.
4. Bâtir le tableau des variations des coordonnées x et y du point $M(t)$.
5. Préciser si la courbe Γ_2 admet des asymptotes et des branches infinies.
6. Tracer Γ_2 en faisant apparaître les éléments qui facilitent sa construction (points particuliers, tangentes particulières, asymptotes,...).