T. D. n$^{\text{o}}$ 10
Algèbre générale. Résolution de systèmes linéaires.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2009.
Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e, N sous-groupe distingué de G si et seulement si

$$\begin{array}{ll}(sg_1) & \forall (h,h') \in N \quad h \cdot h' \in N \\ (sg_2) & \forall h \in N \quad h^{-1} \in N \\ (sg_3) & \forall (g,h) \in G \times N \quad ghg^{-1} \in N\end{array}$$

Rappel : (sg_1) et (sg_2) sont les propriétés caractéristiques d'un sous-groupe de G.

1. Montrer que G et $\{e\}$ sont des sous-groupes distingués de G.
2. Démontrer que si G est un groupe commutatif alors tout sous-groupe est un sous-groupe distingué.
3. Soient H un sous-groupe de G et de N un sous-groupe distingué [de] G.
   a. Démontrer que $N \cap H$ est un sous-groupe distingué de H.
   b. En déduire que si $N \subset H$ alors N est un sous-groupe distingué de H.
4. Démontrer que l'intersection de sous-groupes distingués de G est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 2 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE 2007.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0.$$
On notera G l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Rappeler la définition d'un groupe.
3. Montrer que, en adjoignant à G un nombre complexe bien choisi u, $G \cup \{u\}$ est un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{C}$.

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $x_1, \ldots, x_n$, n vecteurs de E.

a) On considère les vecteurs $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 - x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ et $y_n = x_n - x_1$. Sont-ils linéairement indépendants ?

b) On suppose que n est impair. Montrer que si les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants alors il en est de même des vecteurs $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2 + x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1} + x_n$ et $y_n = x_n + x_1$. Que se passe-t-il si n est pair ?

Exercice 4 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, 2003.
Dans ce problème E et F désignent deux espaces vectoriels sur le corps des réels (noté $\mathbb{R}$), de dimension finie ($\dim E = n$ et $\dim F = m$). On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Question préliminaire

Montrer que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur lui-même. Quelle est sa dimension ?

Dans tout ce qui suit, on appelle **forme linéaire** sur E (respectivement F) une application linéaire de E (respectivement F) vers $\mathbb{R}$.
On appelle **espace dual** de E (respectivement F), noté E^* (respectivement F^*), l'ensemble des formes linéaires sur E (respectivement F).

Partie I

1. Montrer que E^* est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u une application linéaire de E vers F. On appelle transposée de u, notée ${}^t u$, l'application de F^* vers E^* définie par : pour tout $\phi \in F^*$, ${}^t u(\phi) = \phi \circ u$. (On rappelle que $\circ$ désigne la composition des applications linéaires).
   a. Vérifier que ${}^t u$ est une application linéaire de F^* vers E^*.
   b. Montrer que l'application T qui à u associe ${}^t u$ est une application linéaire de $L(E, F)$ vers $L(F^*, E^*)$.
   c. Montrer que si G désigne un troisième espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et si v est une application linéaire de F vers G, alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

Partie II

Soit A une partie quelconque de E. On appelle orthogonal de A dans E^*, notée A°, l'ensemble $A^\circ = \{\phi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \phi(x) = 0\}$.

1. Montrer que pour toute partie A de E, A° est un sous-espace vectoriel de E^*.
2. Montrer que toutes parties A et B de E,
   a. $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$
   b. $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
3. Soit $\mathrm{Vect}(A)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de A. Montrer que $(\mathrm{Vect}(A))^\circ = A^\circ$.
4. Montrer que $E^\circ = \{0_{E^*}\}$.
5. Montrer que pour tout $u \in L(E, F)$; $\ker {}^t u = (\mathrm{Im}\, u)^\circ$.

Partie III

On rappelle une des hypothèses de départ du problème, à savoir que E est de dimension finie et $\dim E = n$.

1. Montrer que pour tout $\phi \in E^*$ et non identiquement nul, $\dim \ker \phi = n - 1$.
2. Soit $B = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E. On définit la famille de n vecteurs suivants :

$$B^* = (e_i^*)_{i=1,\ldots,n} \text{ tel que pour tout } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 1, \ldots, n,$$
$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a. Montrer que tout élément x de E s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) \cdot e_i.$$

   b. Montrer que tout élément ϕ de E^* s'écrit :

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} e_i(\phi) \cdot e_i^*.$$

   c. Montrer que B^* est une base de E^*.

   d. En déduire que $\dim E^* = \dim E$.

Partie IV

Soit $C = (\phi_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de E^*. On se propose de montrer dans cette partie qu'il existe une base unique $B = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$ de E dont C est la duale, c'est-à-dire telle que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\phi_i = e_i^*$.
Comme E^* est un espace vectoriel, il admet un espace dual noté E^{**}, appelé aussi bidual de E.

1. Montrer que $\dim E = \dim E^{**}$.
2. Soit l'application $\delta : E \to E^{**}$, $x \mapsto \delta(x) = \widehat{x}$ tel que pour tout $\phi \in E^*$, $\widehat{x}(\phi) = \phi(x)$.
   a. Vérifier que δ est une application linéaire.
   b. Montrer que δ est injective.
   c. En déduire que δ est bijective. On note δ^{-1} sa réciproque.
3. Démontrer que $B = (\delta^{-1}(\phi_i^*))_{i=1,\ldots,n}$ est une base de E et que pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\phi_j(\delta^{-1}(\phi_i^*)) = \phi_i^*(\phi_j) = \delta_{ij}$.

Partie V

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\dim E = \dim H + \dim H^{\circ}$. On pourra pour cela admettre et utiliser le résultat suivant : toute famille libre de p ($p < n$) vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n peut être complétée par $n - p$ vecteurs pour former une base de cet espace vectoriel.
2. Déduire de la question précédente que si $u \in L(E, F)$ alors le rang de u est égal à celui de ${}^t u$.
3. On suppose que $\dim H = n - 1$. Montrer que :
   a. il existe $\phi \in E^*$ tel que $\ker \phi = H$.
   b. toutes les formes linéaires de noyau H sont proportionnelles.