T. D. n$^{\text{o}}$ 11
Réduction des endomorphismes.
Diagonalisation.

Exercice 1 : Attaché de l'INSEE 2005.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et f un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E. On suppose qu'il existe un entier naturel $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$ est une famille libre de E.
2. En déduire $p \leqslant n$.
3. Établir que $\{0_E\} \subset \ker f \subset \cdots \subset \ker f^{p-1} \subset \ker f^p = E$.

Exercice 2 : Attaché de l'INSEE 2004.
Dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1+\cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

1. Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces propres associés.
2. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : Attaché de l'INSEE 2004.
Soit $\mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$, où n est un entier naturel non nul. On définit sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ l'application f qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$, où P' désigne la dérivée de P.

1. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Déterminer ses valeurs propes et vecteurs propres. On pourra montrer dans un premier temps que si P est un vecteur propre pour la valeur propre λ, alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{n + \dfrac{\lambda}{2}}{X-1} + \frac{n - \dfrac{\lambda}{2}}{X+1}.$$

Exercice 4 : Inspecteur du Trésor. Concours externe, 2006.
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(n \geqslant 2)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

1. Soient f et g deux endomorphismes de E. On suppose que x est vecteur propre de f.
   (i) Démontrer que x est aussi vecteur propre de $g = f^2$.
   (ii) La réciproque est-elle vraie ?
2. On considère M et A deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ représentant respectivement f et g dans une base quelconque β de E.
   (i) On suppose que M est diagonalisable et que $M^2 = A$. Montrer que A est diagonalisable.
   (ii) Prouver que si A est diagonalisable, il existe au moins une matrice diagonalisable M telle que $M^2 = A$.
3. Dans cette question $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$. Vous donnerez aussi la matrice de passage vers la base de diagonalisation et son inverse.
   Les matrices M sont appelées « racines » de la matrice A.

Exercice 5 : D'après le concours d'inspecteur du trésor, épreuve 2, 2004.
E désigne l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients complexes. On note Id_E la matrice identité de E.

1. Démontrer que toute matrice de E admet une seule valeur propre, ou deux valeurs propres distinctes, dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que si M a deux valeurs propres distinctes, M est semblable à une matrice diagonale.
   Montrer que si M admet une seule valeur propre a, alors M est semblable à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. Si M admet deux valeurs propres distinctes a et b, montrer l'existence de deux matrices A et B vérifiant : $M^n = a^n A + b^n B$ et calculer A et B en fonction de a, b, M et Id_E.
3. Si M admet 0 comme seule valeur propre, montrer que $M^n = 0$ pour $n > 1$.
   Si M amet une seule valeur propre a, montrer que $M^n = a^n Id_E + na^{n-1}N$ où $N = M - aId_E$ pour tout entier positif n.
4. Montrer que pour toute matrice M de E et pour tout entier n, M^n est combinaison linéaire de M et Id_E (on ne cherchera pas à expliciter les coefficients de la combinaison linéaire).

5. Soit A un élément de E ; résoudre dans E, l'équation $AX = XA$ et montrer que si A et Id_E sont libres, alors X décrit le sous-espace vectoriel engendré par A et Id_E.

Exercice 6 : D'après le concours d'inspecteur des douanes et droits directs, 2007.
On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Partie I

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
2. Montrer que J est diagonalisable.
   Déterminer une matrice réelle diagonale d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
3. En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de J, que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
4. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible.

Partie II

On cherche à présent à déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

1. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.
   a. Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.
   b. On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.
   c. Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer que $\Delta^2 = D_a$.
2. Conclure en donnant l'ensemble auquel doit appartenir le réel a pour que la matrice X vérifiant $X^2 = M_a$ existe.

Exercice 7 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, 2007.
On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I et A^2.
2. a. Calculer les valeurs propres de A (on trouvera trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).

   b. Pour chaque entier k de $\{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A, tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.

   c. En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $(1, 1, 1)$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$.
3. Soient a, b et c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & c \end{pmatrix}$.

   a. Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A et J, puis comme combinaison linéaire de I, A et A^2.

   b. En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'ordre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2.c.

Exercice 8 : Attaché de l'INSEE 2007.
On se propose d'étudier la suite récurrente d'ordre 3 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$$
$$(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3.$$

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et d'une matrice A qu'on explicitera.

2. Calculer AX pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs de la suite pour $u_0 = u_1 = u_2 = 1$.
3. Comment s'appelle le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la matrice A ?
4. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. *(On pourra utiliser les questions précédentes).* A est-elle diagonalisable ?
5. Diagonaliser A en explicitant la matrice de passage.
6. En décomposant le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base de vecteurs propres, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour les valeurs de départ $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 1$.
7. Peut-on choisir des valeurs de départ u_0, u_1 et u_2 telles que $u_{100} = u_{101} = 0$ et $u_{102} = 10^{12}$? *(On argumentera sa réponse).*
8. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour la matrice ${}^tA$ associé à la valeur propre λ. Calculer les valeurs de la suite définie par l'équation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = z_1 u_{n+2} + z_2 u_{n+1} + z_3 u_n$$
en fonction de $v_0 = z_1 u_2 + z_2 u_1 + z_3 u_0$.

Exercice 9 : D'après Banque Commune d'Épreuves 2008 – Première épreuve (option économique).

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1, 1, 1)$, telle que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}BP$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$, qui à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}MP$, où P est définie en **I.2**.
   a. Montrer : $M \in \ker f \Leftrightarrow DN = NC$.
   b. Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$.
   c. Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. a. En déduire la dimension de $\ker f$, puis la dimension de $\operatorname{Im} f$
   b. Donner au moins un élément non nul de $\ker f$ et donner au moins un élément non nul de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 10 : Changement de bases.

a) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Soit également $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} e'_1 & = & e_2 + e_3 \\ e'_2 & = & e_1 + e_3 \\ e'_3 & = & e_1 + e_2 \end{cases}. \qquad (2)$$

(i) Montrer que $\mathcal{B}'$ forme une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(ii) En déduire la matrice N représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

b) Soient $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_1 = (1, X, X(X-1))$, et $\mathcal{B}_2 = ((X+1)^2, (X-1)(X+1), (X-1)^2)$, trois bases de $\mathbb{R}_2[X]$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice représentative dans $\mathcal{B}_1$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

(i) Déterminer les matrices de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ et Q de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

(ii) En déduire la matrice N représentative de f de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 11 : Valeurs propres, vecteurs propres, matrices diagonalisables.
Soient les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Déterminer pour chacune des matrices ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Sont-elles diagonalisables ?
Exprimer alors chacune des matrices diagonalisables en fonction d'une matrice diagonale qui lui est semblable.

Exercice 12 : Matrices non diagonalisables, trigonalisation.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et A sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

D'après l'exercice précédent, on sait que A n'est pas diagonalisable.
Déterminer trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) formant une base de $\mathbb{R}^3$ et tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(e_1) & = & e_1 \\ f(e_2) & = & -e_2 \\ f(e_3) & = & e_1 - e_2 + e_3 \end{array} \right. . \tag{6}$$

En déduire une matrice triangulaire semblable à A.

Exercice 13 : Six propriétés indispensables.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

a) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
b) On suppose que A admet une unique valeur propre λ. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I$.
c) Montrer que si λ est valeur propre de A et X est un vecteur propre associé à λ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est valeur propre de A^k et X est un vecteur propre associé à λ^k.
d) On suppose que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ, alors $1/\lambda$ est valeur propre de A^{-1} et X est un vecteur propre associé à $1/\lambda$.

e) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer M^2 et M^3. Vérifier que $M^3 - 2M^2 - M + 2I = 0$.

(ii) En déduire que les valeurs propres de M sont dans $\{-1, 1, 2\}$.

f) Montrer que les valeurs propres de toute matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Exercice 14 : Puissances n−ème d'une matrice

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (i) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$.

   (ii) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne suivant les puissances décroissantes de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

   (iii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de A et I, puis en fonction de n.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (i) Diagonaliser A.

   (ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (i) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I + \beta_n J. \tag{7}$$

   (ii) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 que l'on précisera.

   (iii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

Exercice 15 : Quelques matrices particulières.

Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

a) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k.

(ii) Déterminer les valeurs propres de J. J est-elle diagonalisable ?

b) Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, L^k.

(ii) En déduire les valeurs propres possibles de L.

(iii) Montrer que L est diagonalisable.

c) Soient x et y deux réels et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} y & x & \cdots & \cdots & x \\ x & y & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & y & x \\ x & \cdots & \cdots & x & y \end{pmatrix}$.

(i) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k en fonction de I et L, définie à la question b).

(ii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. A est-elle diagonalisable ?

d) Soient n un entier supérieur ou égal à 3, a, b et c trois réels et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & b & c & 0 & & & \vdots \\ 0 & a & b & c & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & a & b & c & 0 \\ \vdots & & & 0 & a & b & c \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que λ est valeur propre de A et que $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $X \neq 0$, est un vecteur propre associé à λ si et seulement si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], u_k = x_k \\ \forall k \in \mathbb{N}, cu_{n+k+2} = (\lambda - b)u_{n+k+1} - au_{n+k} \end{cases} \tag{8}$$

vérifie la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, cu_{k+1} + (b-\lambda)u_k + au_{k-1} = 0. \qquad (9)$$

(ii) On suppose dans cette question que $ac = 0$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

(iii) On suppose maintenant que $ac > 0$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A (on pourra considérer une valeur propre λ de A telle que $(b-\lambda)^2 - 4ac < 0$ et montrer qu'alors il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = b + \sqrt{ac}\cos(\theta)$. En déduire que A est diagonalisable.

(iv) On suppose enfin que $ac < 0$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 16 : Suites et matrices.
Soient S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n,$$

et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite élément de S telle que

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 2.$$

1. Déterminer les racines α, β et γ de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
2. (i) Montrer que S est un espace vectoriel, puis que les suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de S.
   (ii) Soit f l'application qui à tout élément u de S associe $f(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que f est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^3$.
   (iii) En déduire $\dim S$, puis une base de S.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de w_n en fonction de n.

Exercice 17 : Matrices de permutation circulaire (ou circulantes).
Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

a) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sa matrice représentative dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

(i) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.

(ii) Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $g^k(e_i)$. En déduire, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, J^k.

b) Soient $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ n nombres complexes et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(i) Exprimer A en fonction des $(J^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.

(ii) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.