T. D. n$^{\text{o}}$ 15
Calcul différentiel. Intégrales multiples.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur analyste, 2008.
Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions des variables x et y suivantes :

1. a. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{25}{4} - x^2 - y^2}}$

   b. $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3x + 4y}}$

   c. $h(x,y) = \sqrt{\cos\left(x^2 + y^2\right)}$

   Indication : l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

2. a. $t(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - y^2}}$

   b. $u(x,y) = \ln\left(x^2 - y\right)$

Exercice 2 : D'après Banque Commune d'Épreuves, option économique, première épreuve, 2008.
On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f\ :\ [0;+\infty[\ \to\ \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln t - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty]$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in\ ]0;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de f.
5. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

b. Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

d. Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G\ :\ ]1;+\infty[\ \to\ \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1;+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ & \text{et} & \\ G''(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right). \end{array}$$

   À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. a. Montrer que G' est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
   b. Vérifier : $G'(2) > 0$.
   c. Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi\ :\ ]1;+\infty[^2\ \to\ \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in]1;+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x, y) = \left(y - f(x+1)\right)^2 + \left(y - f(x-1)\right)^2,$$

où l'application f est définie dans la partie **I**.

1. Justifier que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1;+\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de Φ en tout (x, y) de $]1;+\infty[^2$.
2. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ, où α est défini en **II 2.c**.
3. Est-ce que Φ admet un extrémum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Exercice 3 :

Notons f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(x, y) = (x^2 - y^2)\ln\left(x^2 + y^2\right) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Sans les calculer, montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x).$$
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot$
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 :
Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_p)$. En quelles points de E l'application
$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$
est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? En ces points, déterminer la différentielle et le gradient de cette application.

Exercice 5 :
Notons
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \sqrt{\operatorname{tr}(I_n + {}^tXX)}. \end{array}$$
Calculer les dérivées partielles de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 6 :
Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$.

Exercice 7 :
Montrer que
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & X^2 \end{array}$$
est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 8 :
La forme différentielle $\omega = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x^2}{(x+y)^2}\mathrm{d}x$ est-elle exacte ?
Dans ce cas, rechercher des primitives de ω.

Exercice 9 :
Notons f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

1. Étudier la continuité et la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que pouvons-nous en déduire ?

Exercice 10 :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et u un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Nous posons $\widetilde{f} = f \circ u$.
Montrer que $\Delta \widetilde{f} = (\Delta f) \circ u$, où $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Exercice 11 :
Montrer que la recherche des pavés de $\mathbb{R}^3$ de volume V dont la surface est minimale se ramène à l'étude des extrema de l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (l,h) & \mapsto & lh + \dfrac{V}{l} + \dfrac{V}{h}. \end{array}$$

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. a. Montrer que pour tout $m > 0$, il existe $(\epsilon, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \epsilon < M$, tel que : $\forall (l,h) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus [\epsilon, M]^2, f(l,h) > m$.
   b. Déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 12 :
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

à l'aide du changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x + ky \\ v & = & x - ky. \end{array} \right.$$

Exercice 13 :

1. La forme différentielle $\omega = 2xz\mathrm{d}x - 2yz\mathrm{d}y - (x^2-y^2)\mathrm{d}z$ est-elle exacte ?

2. Montrer que la forme différentielle $\omega' = \dfrac{2xz}{z^2}\mathrm{d}x - \dfrac{2yz}{z^2}\mathrm{d}y - \dfrac{x^2-y^2}{z^2}\mathrm{d}z$ est exacte et déterminer une primitive de ω'.
3. Rechercher les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi : & I & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, et telles que :

$$\forall\, t \in I, \quad 2xzx' - 2yzy' - (x^2 - y^2)z' = 0.$$

Exercice 14 :

1. Notons $U = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi]\}$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_-\}$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & U & \rightarrow & V \\ & (\rho, \theta) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme.
2. Notons

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & V & \rightarrow & U \\ & (x, y) & \mapsto & g(\rho(x, y), \theta(x, y)). \end{array}$$

Soit

$$\begin{array}{rccc} g : & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & g(x, y) \end{array}$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$. Notons

$$\begin{array}{rccc} g^* = g \circ f : & U & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\rho, \theta) & \mapsto & g(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)). \end{array}$$

Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g^*}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g^*}{\partial y}\cdot$
3. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_-\}$. Déterminer les applications $g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ solutions de l'équation au dérivées partielles :

$$x^2 + y^2 + \left(x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}\right) g = 0.$$

4. Supposons que $g \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. Nous posons $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. Exprimer Δg en coordonnées polaires, c'est-à-dire à l'aide des dérivées partielles de g^* par rapport à ρ et θ.