T. D. n$^{\text{o}}$ 9
Matrices. Déterminants.

Exercice 1 : D'après le concours d'inspecteur des impôts, épreuve 3, 2008.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3[=](0, 1, 1)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de E.
2. Déterminer les coordonnées de $u = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Soit f l'endomorphisme défini sur E par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(u_1) & = & 3u_1 - 2u_3 \\ f(u_2) & = & 3u_2 - u_3 \\ f(u_3) & = & u_1 + u_2 - u_3 \end{array}\right.$$

   Déterminer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$ et la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer l'image et le noyau de f et une base pour chacun de ces sous-espaces vectoriels (On déterminera les coordonnées des vecteurs dans la base canonique de E).

Exercice 2 : D'après le concours d'inspecteur du trésor public, épreuve 2, 2005.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $J^k = 0$).
2. On pose $A_x = xJ + I$, où x est un nombre réel, et I la matrice identité d'ordre 3.
   a. Exprimez A_x^p en fonction de x, p, I et J (p étant un entier supérieur ou égal à 2).
   b. Donnez A_x^p en fonction de x et p.
3. Montrez que la matrice A_x est inversible pour tout x, et donner son inverse A_x^{-1}.
4. Donnez l'inverse de la matrice carrée d'ordre n : $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : D'après le concours de l'EN3S, 2007.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les réels a tels qu'il existe des vecteurs u non nuls de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = au$.
2. Soit (u_1, u_2, u_3) une famille de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_1 &= (1, y_1, z_1) \text{ et } f(u_1) = u_1/2 \\ u_2 &= (x_2, 1, z_2) \text{ et } f(u_2) = u_2 \\ u_3 &= (1, 1, 1) \end{cases}$$

   déterminer y_1, z_1, x_2 et z_2 et montrer que (u_1, u_2, u_3) une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Exprimer $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3. En déduire la matrice P de f dans la base (u_1, u_2, u_3).
4. Montrer que P^n s'écrit sous la forme

$$P^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & d_n \\ 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}$$

   et déterminer a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.
5. Soit A la matrice constituée des coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & 1 \\ y_1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est la matrice d'un isomorphisme et calculer A^{-1}.

Exercice 4 : D'après le concours d'Attaché statisticien ENSAI, économie, 2008.
Dans [cet exercice], I désigne la matrice identité de dimension 3. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de la matrice M sont 1 et 3. Est-ce que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Déterminer trois constantes réelles a, b, c telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{ax+b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-3}.$$

On pose $P_1 = (aM + bI)(M - 3I)$ et $P_2 = c(M - I)^2$.

3. Calculer les matrices P_1, P_2, P_1^2 et P_2^2.
4. On note $D = P_1 + 3P_2$ et $N = M - D$.
   a. Calculer D, N, N^2, DN et ND.
   b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = P_1 + 3^k P_2$. (Avec par convention, $D^0 = I$.)
   c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = D^k + kN$.
   d. En déduire M^k pour tout entier naturel k.

Exercice 5 : D'après le concours d'Attaché de l'INSEE, économie, 2006.
Soit $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$.

1. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Montrer que $\omega \in U_n$. Donner la forme générale des éléments de U_n.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$, montrer que :

$$B = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Exercice 6
Soit A une matrice de taille (n, n) telle que $A^2 = A$ et $A \neq I_n$. Montrer que A n'est pas inversible. Trouver toutes les matrices de taille $(2, 2)$ autres que la matrice identité notée I_2 et la matrice nulle notée 0_2, telles que $A^2 = A$. Que peut-on dire de leurs lignes et de leurs colonnes ?