T. D. n° 4
Exercices sur des résultats divers

Exercice 1 Propriétés sur la moyenne et la variance d'un échantillon

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d d'espérance μ et d'écart-type σ. Notons

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

1. Moyenne empirique.
   a. Calculer l'espérance de $\overline{X}$.
   b. Calculer la variance de $\overline{X}$.
2. Variance empirique.
   a. Calculer l'espérance de S^{*2}.
   b. Calculer la variance de S^{*2}.
3. Dans cette question, nous supposons que les variables aléatoires suivent une loi normale. Répondre aux questions 1.a., 1.b, 2.a, 2.b dans ce cas précis. Qu'observez-vous ?

Exercice 2 Un résultat du cours

Démontrer la proposition suivante.
Proposition : Soient une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée-réduite et X une variable suivant indépendamment de U une loi χ^2_n. Alors la variable aléatoire

$$T_n = \frac{U}{\sqrt{X/n}}.$$

suit la loi de Student à n degrés de liberté.
De plus, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, alors la variable aléatoire

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}}$$

suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté, où

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$