T. D. n$^{\text{o}}$ 5
Estimation ponctuelle

Exercice 1 Une inégalité

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux et suivant une loi d'espérance m et d'écart-type σ.

1. Montrer que pour toute statistique T nous avons :

$$\left(\mathbb{E}\left[T^2\right]\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left[T^2\right].$$

Dans quel cas avons-nous l'égalité ?

2. Déterminer un estimateur T^2 sans biais de σ^2 ; dans quel cas T est-il sans biais pour σ ?

3. En déduire que généralement, la statistique :

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

n'est pas un estimateur sans biais de l'écart-type σ.

Exercice 2 Modèle de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ. Nous considérons un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.

1. Déterminer deux estimateurs $\widehat{\lambda}_1$ et $\widehat{\lambda}_2$ sans biais du paramètre λ fondés sue les caractéristiques empiriques d'un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.

2. Comparer ces deux estimateurs de λ.

Exercice 3 Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 2a]$. Nous considérons une suite de n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Nous posons $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ et $T = \operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

2. Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur convergent de a.

3. Déterminer la densité de la variable T. Calculer l'espérance et la variance de T. En déduire un autre estimateur $T^\star$ sans biais de a.

4. Comparer les deux estimateurs de a.

Exercice 4 Famille exponentielle 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ. Montrer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ appartient à la famille exponentielle.

Exercice 5 Famille exponentielle 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p.
Montrer que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n et p appartient à la famille exponentielle.

Exercice 6 Famille exponentielle 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

1. Nous supposons que μ est inconnu et que σ est connu. Montrer que la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ appartient à la famille exponentielle.

2. Nous supposons que μ et σ sont inconnus. Montrer que la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ appartient à la famille exponentielle.

Exercice 7 Famille exponentielle 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(r,\lambda)$ de paramètres r et λ. Montrer que la loi $\Gamma(r,\lambda)$ de paramètres r et λ appartient à la famille exponentielle.

Exercice 8 Famille exponentielle et exhaustivité

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $U_{[0,\theta]}$ sur $[0,\theta]$ avec $\theta > 0$.

1. La famille de cette loi est-elle exponentielle ?

2. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X. Déterminer une statistique exhaustive pour θ.

Exercice 9 Exhaustivité et loi exponentielle

Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ et $(X_1,\ldots,X_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.
Montrer que la statistique

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est une statistique exhaustive.

Exercice 10 Exhaustivité et loi normale

Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de paramètres μ et σ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.
Considérons les statistiques

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{et} \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer que le couple $T = (\overline{X}, U)$ est une statistique exhaustive pour le couple (μ, σ^2).

Exercice 11 Exhaustivité et loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.
Montrer que la statistique

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est une statistique exhaustive :

1. En montrant que $\mathbb{P}(X_1, \ldots, X_n | S = s)$ est indépendante de λ.

2. En utilisant le critère de factorisation.

3. En utilisant l'exercice 4.

Exercice 12 Exhaustivité et conditionnement

Nous considérons une variable aléatoire X continue de densité de probabilité $f(x, \theta)$ et un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.
Soit $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ une statistique exhaustive. Nous tirons un échantillon aléatoire de taille n de loi parente la loi de X conditionnée par l'événement $x \in I$, I partie mesurable de $\mathbb{R}$.
La statistique $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ est-elle toujours une statistique exhaustive ?

Exercice 13 Minimisation du risque pour l'estimation de la variance d'une loi normale

Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de paramètres μ et σ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire de taille n de loi parente X.
Considérons la statistique suivante :

$$S_{n,c}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[S^2_{n,c}]$ et $\mathrm{Var}[S^2_{n,c}]$.

2. Soit k un nombre réel positif. Nous introduisons les estimateurs $T(k)$ de σ^2 de la forme $T(k) = kS^2_{n,c}$.
Calculer $EQM(T(k)) = \mathbb{E}\left[\left(T(k) - \sigma^2\right)^2\right]$.

3. Déterminer la valeur $k^\star$ de k qui minimise $R(k)$. Calculer alors $R(k^\star)$. Que dire de l'estimateur $t(k^\star)$?