T. P. n$^{\text{o}}$ 4
Tests d'hypothèses

Tests sur un échantillon

Comparaison d'une moyenne observée et d'une moyenne théorique.

Exercice 1. Gaz nocif.

Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif, pour un volume donné, suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Nous effectuons n prélèvements conduisant aux valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

1. Nous savons que $\sigma^2 = 100$. Les valeurs des $n = 10$ prélèvements sont les suivantes :

$$35,7; 44,4; 42,5; 65,3; 47,9; 45,4; 42,8; 40,0; 54,6; 61,4.$$

   a. Pouvons-nous conclure avec un risque α égal à 5% que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?
   b. Pouvons-nous donner cette conclusion au risque 1% et 10% ?

2. Nous ne connaissons pas la variance σ^2, mais nous avons effectué 200 prélèvements. Nous trouvons une moyenne égale à 51 et une variance empirique corrigée égale à 100.
   Pouvons-nous conclure avec un risque α égal à 5% que l'espérance μ est inférieure à 50, qui est le seuil tolérable admis ?

Exercice 2. Comprimés.

Les spécifications d'un médicament indiquent que chaque comprimé doit contenir en moyenne $1,5\,g$ de substance active.
100 comprimés sont choisis au hasard dans la production, puis analysés.
Les mesures x_i en g des quantités de substance active étant trop nombreuses, seules leur somme et la somme de leurs carrés vous sont données :

$$\sum_{x_i}^{100} x_i = 155 \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 248.$$

Au risque $\alpha = 5\%$, pouvez-vous dire que la production respecte l'indication mentionnée ?

Comparaison d'une variance observée et d'une variance théorique.

Exercice 3. Contrôle de qualité.

Nous désirons comparer la régularité du travail d'une nouvelle doseuse pour boîte de haricots verts à la norme habituelle de l'usine pour laquelle l'écart-type est $\sigma = 4\,g$. Nous supposons que la variable aléatoire donnant le poids d'une boîte prise au hasard dans la production suit une loi normale.

1. Nous prélevons un échantillon de 10 sur lequel nous obtenons un écart-type corrigé estimé $s_c = 4,84\,g$. Au risque $\alpha = 5\%$, pouvez-vous considérer que ce résultat est conforme à la norme souhaitée ?

2. Même question en supposant que les mêmes valeurs numériques ont été obtenues à partir d'un échantillon de taille 50.

Tests sur deux échantillons

Premier cas : les deux échantillons sont indépendants

Exercice 4. Enseignement.

Nous souhaitons tester l'efficacité d'une formation dans un domaine donné. Pour cela, nous comparons deux échantillons de personnes du niveau de connaissance requis pour accéder à la formation. Le premier échantillon (1) est constitué de 220 personnes n'ayant pas subi la formation, le deuxième (2) de 210 personnes venant de la terminer. Chaque échantillon, que nous considérerons comme représentatif (au sens de la sélection quasi aléatoire) des populations avec ou sans formation, est soumis au même test. Les notes moyennes respectives obtenues sont 13,4 et 14,6. Les notes montrent, respectivement aussi, des écarts-types corrigés de 2,98 et 2,64.

Poser et tester l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au vu de ces résultats (aide : ici l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est unilatérale).

Exercice 5. Pisciculture.

Dans une pisciculture, l'effet de deux régimes alimentaires sur la croissance d'une espèce de poisson a été analysé. Pour se faire, la longueur de deux lots de poissons a été mesurée à l'issue de l'expérience. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$\begin{array}{cc}
\text{Régime A} & \text{Régime B} \\
n_A = 180 & n_B = 100 \\
\sum x_A = 3780 & \sum x_B = 2140 \\
\sum x_A^2 = 80000 & \sum x_B^2 = 46000.
\end{array}$$

Une différence de régime alimentaire affecte-t-elle significativement la croissance des poissons au seuil $\alpha = 5\%$?

Exercice 6. Les oeufs de coucous.

Dans un article de la revue *B*iometrica, le biologiste Latter donne la longueur L en mm des oeufs de coucou trouvés dans les nids de deux espèces d'oiseaux :
– Dans des nids de petite taille (roitelet) :

$$\begin{array}{ccccc}
19,8; & 22,1; & 21,5; & 20,9; & 22,0 \\
21,0; & 22,3; & 21,0; & 20,3; & 20,9 \\
22,0; & 22,0; & 20,8; & 21,2; & 21,0.
\end{array}$$

– Dans des nids de taille plus grande (fauvette) :

$$\begin{array}{ccccc}
22,0; & 23,9; & 20,9; & 23,8; & 25,0 \\
24,0; & 23,8; & 21,7; & 22,8; & 23,1 \\
23,5; & 23,0; & 23,0; & 23,1 & .
\end{array}$$

1. Vérifier que dans chacune des deux espèces, la longueur suit une loi normale.
2. Pouvez-vous dire, au seuil $\alpha = 5\%$, que les deux espèces ont la même variance ?
3. Si oui, tester l'hypothèse que le coucou adapte la taille de ses oeufs à la taille du nid dans lequel il pond.

Second cas : les deux échantillons sont appariés

Exercice 7. Hauteurs d'arbres mesurées selon deux méthodes.

Nous avons mesuré des arbres debout, par une méthode trigonométrique. Pour vérifier la fiabilité de la méthode, les mêmes arbres ont été à nouveau mesurés au sol après abattage. Les tailles en mètres pour douze arbres et pour les deux méthodes de mesure sont données dans le tableau suivant :

Arbres érigés (Taille en m)	20,4	25,4	25,6	25,6	26,6	28,6
	28,7	29,0	29,8	30,5	30,9	31,1
Arbres abattus (Taille en m)	21,7	26,3	26,8	28,1	26,2	27,3
	29,5	32,0	30,9	32,3	32,3	31,7

1. Calculer les statistiques descriptives de base pour ces deux échantillons. Commenter.
2. Les deux échantillons sont-ils indépendants ?
3. Tester si les deux méthodes de mesure donnent des résultats semblables ou non.
4. Quel est le type d'erreur que vous risquez de commettre ?

Exercice 8. Les traitements hypnotiques

À six volontaires, nous donnons un hypnotique A et nous observons les durées d'endormissement suivantes :

Sujets	1	2	3	4	5	6
T (en min)	15	25	38	19	45	8

À ces mêmes volontaires, nous administrons quelques temps après un autre hypnotique B.

Sujets	1	2	3	4	5	6
T (en min)	13	22	36	20	45	10

Nous admettons que la différence des durées d'endormissement suit une loi normale.

1. Y a-t-il une variation significative, au risque $\alpha = 5\%$, des durées d'endormissement entre ces deux expériences ?
2. En admettant que les différences des durées d'endormissement conservent la même moyenne et le même écart-type estimé, sur quel nombre minimum n, avec $n \geqslant 30$, d'individus doit porter l'expérience pour conclure, au m ême risque, à une différence significative ?