Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1 Efficacité et maximum de vraisemblance.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$, X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $1/\theta$ et d'écart-type 1 et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon indépendant de taille n de loi parente X.

1. Quel est l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ par maximum de vraisemblance de θ ?

2. L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est-il sans biais, asymptotiquement sans biais ? L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est-il efficace, asymptotiquement efficace ?

3. Montrer que :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \theta_0).$$

Vous pourrez utiliser, sans le démontrer, la propriété suivante.

Méthode Delta

Soit $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, a un vecteur de $\mathbb{R}^p$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que :

$$f(n)(X_n - a) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où Σ est une matrice réelle définie positive.

Soit $g\ :\ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable en a, $G(a)$ la matrice réelle de taille (p, q) de ses dérivées premières évaluées en a :

$$G(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial u_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial u_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$f(n)(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, G(a)\Sigma G(a)'),$$

où $G(a)'$ est la transposée de $G(a)$.

4. En déduire que l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est normalement asymptotiquement efficace. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 2 Test d'un paramètre d'une loi de Weibull.

Soit X une variable aléatoire X qui suit une loi de Weibull de densité :

$$f(x, \theta, \lambda) = \lambda\theta x^{\theta-1} \exp^{-\lambda x^\theta}$$

avec $\lambda > 0$, $\theta > 0$ et $x > 0$.

Le paramètre θ est supposé connu.

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de loi parente X.

Nous nous intéressons au problème de test suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} H_0 & : & \lambda & = & \lambda_0 \\ H_1 & : & \lambda & = & \lambda_1 \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1 < \lambda_0.$$

1. Déterminez la loi de la variable $Z = \lambda X^\theta$.

2. Déterminez la forme de la région critique du W du test en utilisant la méthode de Neyman et Pearson.

3. Donnez une réponse au problème de test pour l'application numérique suivante :

$$\lambda_0 = 2 \quad \lambda_1 = 1 \quad \theta = 3 \quad n = 10 \quad \alpha = 0,05 \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^3 = 18.$$

Exercice 3 Tests entre deux hypothèses simples de paramètres multidimensionnels.

La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n de loi parente X.
En utilisant la méthode de Neyman et Pearson, déterminer la forme de la région critique du test suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} H_0 & : & \mu & = & \mu_0 & \sigma & = & \sigma_0 \\ H_1 & : & \mu & = & \mu_1 & \sigma & = & \sigma_1 \end{array} \right. .$$