EXEMPLE QUI ILLUSTRE LA RÉGRESSION MULTIPLE

FRÉDÉRIC BERTRAND ET MYRIAM MAUMY

Je vais traiter cet exemple sans me servir de R ou de Minitab et faire tous les calculs "à la main" pour vous montrer au moins une fois dans ce cours comment on applique les formules mathématiques qui sont données dans ce cours.

Les données présentées dans le tableau ci-dessous concernent 9 entreprises de l'industrie chimique. On cherche à établir une relation entre la production y_i, les heures de travail x_{i1} et le capital utilisé x_{i2}.

On fait donc l'hypothèse d'un modèle de régresiion multiple avec 2 variables explicatives, c'est-à-dire en notation vectorielle :

$$\vec{y} = \beta_0 \vec{1} + \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \vec{\varepsilon}$$

ou encore en notation matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \\ 360 \\ 380 \\ 430 \\ 440 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1\,100 & 300 \\ 1 & 1\,200 & 400 \\ 1 & 1\,430 & 420 \\ 1 & 1\,500 & 400 \\ 1 & 1\,520 & 510 \\ 1 & 1\,620 & 590 \\ 1 & 1\,800 & 600 \\ 1 & 1\,820 & 630 \\ 1 & 1\,800 & 610 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}.$$

Tableau - Production, travail et capital

Entreprise i	Travail (heures) x_{i1}	Capital (machines/heures) x_{i2}	Production (100 tonnes) y_i
1	1 100	300	60
2	1 200	400	120
3	1 430	420	190
4	1 500	400	250
5	1 520	510	300
6	1 620	590	360
7	1 800	600	380
8	1 820	630	430
9	1 800	610	440

Il s'agit de calculer le vecteur des estimateurs $\hat{\beta}$ défini par l'égalité suivante :

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

Pour cela, on calcule :

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 9 & 13\,790 & 4\,460 \\ 13\,790 & 21\,672\,100 & 7\,066\,200 \\ 4\,460 & 7\,066\,200 & 2\,323\,600 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 6,304\,777 & -0,007\,800 & 0.011\,620 \\ -0,007\,800 & 0.000\,015 & -0.000\,031 \\ 0.011\,620 & -0.000\,031 & 0.000\,072 \end{bmatrix}$$

et :

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2\,530 \\ 4\,154\,500 \\ 1\,378\,500 \end{bmatrix}.$$

On obtient ainsi :

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -437,71 \\ 0,336 \\ 0,41 \end{bmatrix}.$$

L'équation de l'hyperplan des moindres carrés est donc donnée par :

$$\hat{y}(x_1, x_2) = -437.71 + 0.336\, x_1 + 0.41\, x_2$$

On peut également calculer :

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} = \frac{3194}{6} = 532.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} s^2\left(\hat{\beta}\right) &= s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = 532 \begin{bmatrix} 6,304\,777 & -0,007\,800 & 0.011\,620 \\ -0,007\,800 & 0.000\,015 & -0.000\,031 \\ 0.011\,620 & -0.000\,031 & 0.000\,072 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\,355.56 & -4,152 & 6,184 \\ -4,152 & 0,008 & -0,016 \\ 6,184 & -0,016 & 0,038 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les écart-types $s\left(\hat{\beta}_j\right)$ des estimateurs $\hat{\beta}_j$ sont alors donnés par les racines carrées des éléments diagonaux de cette matrice. On a ainsi :

$$\begin{aligned} s\left(\hat{\beta}_0\right) &= 57,93 \\ s\left(\hat{\beta}_1\right) &= 0,089\,66 \\ s\left(\hat{\beta}_2\right) &= 0,196\,1. \end{aligned}$$

On va maintenant réaliser des tests.
Il faut donc s'intéresser à la normalité des résidus afin de savoir si les décisions que nous allons prendre sont légitimes ou non.

On obtient à l'aide de Minitab :

Test de normalité de Anderson-Darling
A-Carré : 0,324
Valeur de P : 0,449
On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle de normalité au seuil $\alpha = 5\%$**.**

Afin de tester l'hypothèse nulle :

$$H_0 : \beta_j = 0$$

contre l'hypothèse alternative :

$$H_1 : \beta_j \neq 0,$$

il s'agit de calculer les statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{t}_c &= \frac{-437.71}{57.93} = -7.56 \\ \mathrm{t}_c &= \frac{0.336}{0.089\,66} = 3.75 \\ \mathrm{t}_c &= \frac{0.41}{0.196\,1} = 2.09 \end{aligned}$$

pour respectivement j=0, j= 1 et j= 2. Comme la valeur critique est donnée par $\mathrm{t}_{0.025;6} = 2.45$, on rejette l'hypothèse nulle au seuil de signification $\alpha = 0.05$ pour j= 0 et j= 1, mais on accepte l'hypothèse nulle pour j= 2.
Conclusion : cela veut dire que la variable X_2 **n'est pas significative dans le modèle.**

On calcule **les intervalles de confiance au niveau** 0.95 **pour les 3 variables** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

$$\begin{aligned} -437.71 \pm 2.45 \times 57.93 &= [-579.64; -295.78] \\ 0.336 \pm 2.45 \times 0.089\,66 &= [0.116; 0.556] \\ 0.41 \pm 2.45 \times 0.196\,1 &= [-0.07; 0.89] \end{aligned}$$

Remarque : la valeur 0 est comprise dans l'intervalle de confiance pour β_2.

Calculons maintenant **le tableau d'ANOVA** pour notre exemple. Il s'agit de calculer les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{SC}_{reg} &= \hat{\beta}\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\overline{y}^2 \\ &= \begin{bmatrix} -437.71 & 0.336 & 0.41 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2\,530 \\ 4\,154\,500 \\ 1\,378\,500 \end{bmatrix} - 428\,152.14 \\ &= 144\,695 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SC}_{tot} &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\overline{y}^2 \\
&= \begin{bmatrix} 60 & 120 & 190 & \cdots & 440 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 190 \\ . \\ . \\ . \\ 440 \end{bmatrix} - 428\,152.14 \\
&= 147\,889
\end{aligned}
$$

On a :

$$\mathrm{SC}_{res} = \mathrm{SC}_{tot} - \mathrm{SC}_{reg} = 147\,889 - 144\,695 = 3\,194.$$

On obtient le tableau d'ANOVA donné par le tableau ci-dessous. On peut tester l'hypothèse :

$$\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

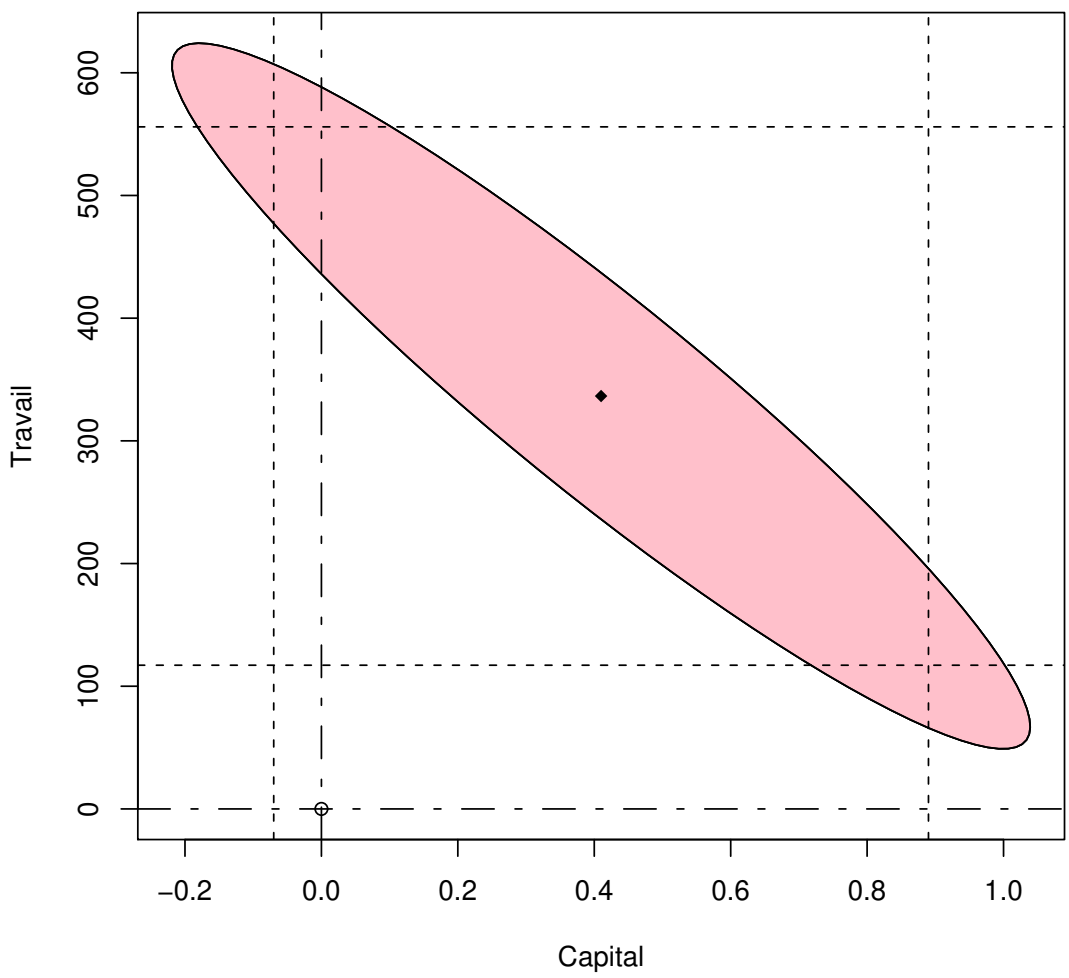
Comme la statistique $\mathrm{F}_c = 135.92$ est supérieure à la valeur critique $\mathrm{F}_{(0.05;\,2;\,6)} = 5.14$, on rejette cette hypothèse au seuil de significativité $\alpha = 0.05$.

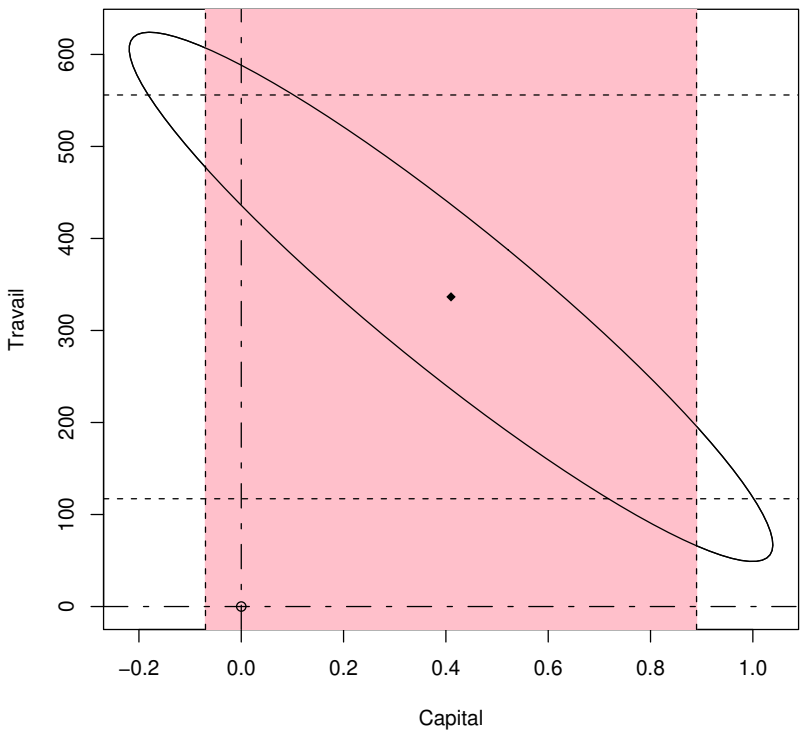
Source de variation	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens	F_c
Régression	144 695	2	72 348	135.92
Résiduelle	3 194	6	532	
Totale	147 889	8		

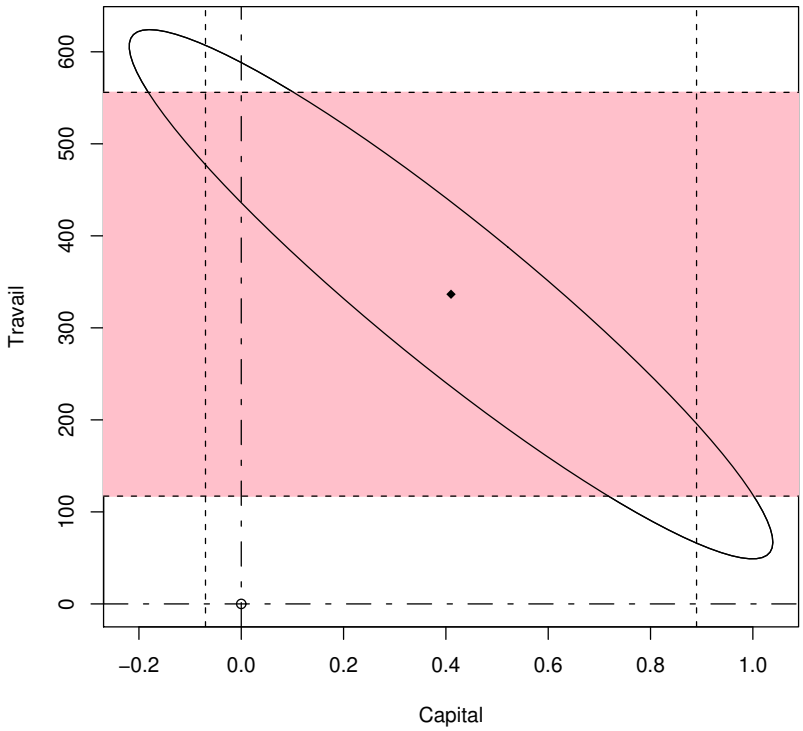
Les instructions suivantes permettent de construire des régions de confiance pour deux paramètres simultanément, c'est-à-dire une ellipse de confiance. Il est intéressant de comparer cette région de confiance simultanée avec les deux que nous obtenons en considérant chacun des paramètres séparément.

```
library(ellipse)
my.confidence.region <- function (g, a=2, b=3, which=0, col='pink') {
  e <- ellipse(g,c(a,b))
  x <- g$coef[a]
  y <- g$coef[b]
  cf <- summary(g)$coefficients
  ia <- cf[a,2]*qt(.975,g$df.residual)
  ib <- cf[b,2]*qt(.975,g$df.residual)
  xmin <- min(c(0,e[,1]))
  xmax <- max(c(0,e[,1]))
  ymin <- min(c(0,e[,2]))
  ymax <- max(c(0,e[,2]))
  plot(e,
       type="l",
       xlim=c(xmin,xmax),
       ylim=c(ymin,ymax),
      )
  if(which==1){ polygon(e,col=col) }
```

```
  else if(which==2){ rect(x-ia,par('usr')[3],x+ia,par('usr')[4],
   col=col,border=col) }
  else if(which==3){ rect(par('usr')[1],y-ib,par('usr')[2],y+ib,
   col=col,border=col) }
  lines(e)
  points(x,y,pch=18)
  abline(v=c(x+ia,x-ia),lty=2)
  abline(h=c(y+ib,y-ib),lty=2)
  points(0,0)
  abline(v=0,lty="F848")
  abline(h=0,lty="F848")
}
my.confidence.region(modele1, which=1)
my.confidence.region(modele1, which=2)
my.confidence.region(modele1, which=3)
```




Travail
0
100
200
300
400
500
600
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Capital


Travail
0
100
200
300
400
500
600
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Capital