

T. D. n° 2

Quelques exercices sur la loi du χ^2

Exercice 1 Une loi du chi-deux à 8 ddl. D'après le livre de M. Gaultier « Probabilités - 70 exercices corrigés avec résumés de cours », collection « Les sciences en fac », Vuibert.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Pearson (ou loi du chi-deux) à 8 degrés de liberté.

1. Quelle est la valeur de X de plus grande densité de probabilité? Calculer l'espérance mathématique de X .
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On désigne par $x_1 = x_1(\alpha)$ et $x_2 = x_2(\alpha)$ les deux nombres positifs tels que

$$\mathbb{P}_X([0, x_1]) = \mathbb{P}_X(]x_2, +\infty]) = \frac{\alpha}{2}.$$

Que vaut $\mathbb{P}_X(]x_1, x_2])$? Quelles sont les limites de x_1 et de x_2 lorsque α tend vers 0? Écrire les valeurs de x_1 et x_2 pour les quatre valeurs de α suivantes :

$$0,02 \quad 0,05 \quad 0,10 \quad 0,20.$$

Exercice 2 Approximation de la loi du chi-deux. D'après le livre de T. Phan et J.-P. Rowencyk « Statistique et probabilités », Dunod.

1. Montrer que, lorsque n est très grand, on peut utiliser l'approximation suivante de la loi du χ^2 :

$$\chi^2(n) = \mathcal{N}(n, \sqrt{2n}).$$

2. On considère n réalisations indépendantes X_i d'une variable aléatoire X suivant une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.
En utilisant l'approximation définie à la question 1, trouver la valeur de n , (α et ε étant donnés), telle que :

$$\mathbb{P}[\sigma^2(1 - \varepsilon) < S^{*2} < \sigma^2(1 + \varepsilon)] = 1 - \alpha$$

$$\text{où } S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

3. Applications numériques avec $\alpha = \varepsilon = 0,05$ ou $\alpha = \varepsilon = 0,01$.

Exercice 3 Un exercice un peu théorique. D'après le livre de Fourdrinier, « Statistique inférentielle », Dunod.

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Montrer que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^{*2}$$

suit une loi du χ_{n-1}^2 .