Devoir en temps libre

Magistère 2ème année 2008-2009

Ce devoir est à rédiger pour le vendredi 28 août 2009.
Il peut être :

- déposé dans mon casier à l'IRMA,
- rendu par voie électronique à l'adresse électronique :
  `fbertran@math.u-strasbg.fr`,
- rendu par voie postale à l'adresse suivante :
  Frédéric Bertrand
  Université de Strasbourg
  IRMA
  7, rue Descartes
  67084 Strasbourg Cedex

Partie 1. Résultats préliminaires.

Soit $\boldsymbol{A}$ un élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à coefficients réels d'ordre $m \times n$.
Nous notons $\mathcal{C}(\boldsymbol{A})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les vecteurs colonnes de $\boldsymbol{A}$ et $\mathcal{L}(\boldsymbol{A})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs lignes de $\boldsymbol{A}$.
Nous désignons par $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ le rang de $\boldsymbol{A}$, par $|\boldsymbol{A}|$ le déterminant de $\boldsymbol{A}$ et par $\boldsymbol{A'}$ la transposée de $\boldsymbol{A}$.

1. Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices respectivement d'ordre $m \times n$ et $n \times p$. Montrez que :

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\}.$$

2. Soit $m, n, r \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$ et de rang r. Montrez qu'il existe deux matrices $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ respectivement d'ordre $m \times r$ et d'ordre $r \times n$ telles que :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) &= \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{BC}. \end{aligned}$$

Un tel couple $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ sera appelé dans la suite une factorisation conforme au rang de $\boldsymbol{A}$.

3. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices d'ordre $m \times n$. Montrez que :

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

4. Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices respectivement d'ordre $m \times n$ et $n \times p$. Montrez que :

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{AB}\right) \geqslant \mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right) + \mathrm{R}\left(\boldsymbol{B}\right) - n. \qquad \textbf{(Inégalité de Frobenius.)}$$

5. Soit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{B}$ des matrices telles que le produit $\boldsymbol{AXB}$ soit défini. Montrez que :

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{AXB}\right) \geqslant \mathrm{R}\left(\boldsymbol{AX}\right) + \mathrm{R}\left(\boldsymbol{XB}\right) - \mathrm{R}\left(\boldsymbol{X}\right).$$

6. Pour une matrice $\boldsymbol{X}$ quelconque, montrez que :

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{X'X}\right) = \mathrm{R}\left(\boldsymbol{X}\right).$$

Si de plus $\boldsymbol{A}$ est une matrice définie positive montrez qu'alors, pour toute matrice $\boldsymbol{X}$ telle que le produit $\boldsymbol{X'AX}$ existe :

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{X'AX}\right) = \mathrm{R}\left(\boldsymbol{X}\right).$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Une matrice $\boldsymbol{G}$ d'ordre $n \times m$ est un *inverse généralisé*, également appelé $g-$*inverse* dans la suite et noté $\boldsymbol{A}^-$, de $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$.

7. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{G}$ deux matrices respectivement d'ordre $m \times n$ et $n \times m$. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\boldsymbol{G}$ est un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$.

(2) Pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}\left(\boldsymbol{A}\right)$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gy}$ est une solution de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$.

8. Si $\boldsymbol{G}$ est un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$, alors :

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{R}\left(\boldsymbol{AG}\right) = \mathrm{R}\left(\boldsymbol{GA}\right).$$

9. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$, $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$ et $\boldsymbol{G}$ un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$. Montrez que l'ensemble $\mathcal{G}(A)$ des $g-$inverses de $\boldsymbol{A}$ est :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{A}) = \left\{\boldsymbol{G} + \left(\boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{GA}\right)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{I_m} - \boldsymbol{AG}\right),\ \left(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\right) \in \mathcal{M}^2_{n,m}\left(\mathbb{R}\right)\right\}.$$

10. Trouvez un $g-$inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ qui ne comporte aucun coefficient nul.

11. Montrez que l'ensemble des $g-$inverses de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'ensemble :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1+a+c & a+d \\ b+c & b+d \end{pmatrix},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

12. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$ de rang r et k un entier compris entre r et $\min(m, n)$. Montrez qu'il existe un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$ de rang k. Déduisez-en qu'une matrice carrée possède toujours un $g-$inverse inversible.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Un $g-$inverse $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{A}$ est appelé un $g-$*inverse réflexif* de $\boldsymbol{A}$ si de plus $\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$.

13. Montrez que si $\boldsymbol{G}$ est un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$, alors $\boldsymbol{GAG}$ est un $g-$inverse réflexif de $\boldsymbol{A}$.

14. Montrez que si $\boldsymbol{G}$ est un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$, alors $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{G})$. Montrez que l'égalité a lieu si et seulement si $\boldsymbol{G}$ est de plus un $g-$inverse réflexif de $\boldsymbol{A}$.

15. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$, $\boldsymbol{G}$ un $g-$inverse de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{A})$. Montrez que l'ensemble des solutions de l'équation $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ est :

$$\{\boldsymbol{Gy} + (\boldsymbol{I_n} - \boldsymbol{GA})\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\}$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Un $g-$inverse $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{A}$ est appelé un *$g-$inverse de norme minimale* de $\boldsymbol{A}$ si de plus $(\boldsymbol{GA})' = \boldsymbol{GA}$.

16. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\boldsymbol{G}$ est un *$g-$inverse de norme minimale* de $\boldsymbol{A}$.

(2) Pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gy}$ est une solution de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ de norme minimale.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Un $g-$inverse $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{A}$ est appelé un *$g-$inverse des moindres carrés* de $\boldsymbol{A}$ si de plus $(\boldsymbol{AG})' = \boldsymbol{AG}$.

17. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\boldsymbol{G}$ est un *$g-$inverse des moindres carrés* de $\boldsymbol{A}$.

(2) Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, $\|\boldsymbol{AGy} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{y}\|$.

Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Un $g-$inverse $\boldsymbol{G}$ de $\boldsymbol{A}$ qui est réflexif, de norme minimale et des moindres carrés est appelé un *inverse de Moore-Penrose* de $\boldsymbol{A}$ et est noté $\boldsymbol{A}^+$. En d'autres termes, $\boldsymbol{G}$ est un *inverse de Moore-Penrose* de $\boldsymbol{A}$ si :

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A} \tag{1}$$
$$\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G} \tag{2}$$
$$(\boldsymbol{AG})' = \boldsymbol{AG} \tag{3}$$
$$(\boldsymbol{GA})' = \boldsymbol{GA}. \tag{4}$$

18. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Montrez qu'il existe un unique inverse de Moore-Penrose de $\boldsymbol{A}$. Vous pourrez commencer par montrer que si $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ est une factorisation conforme au rang de $\boldsymbol{A}$ alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^+ &= (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{C}^+ &= \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{CC}')^{-1} \\ \boldsymbol{A}^+ &= \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+ \end{aligned}$$

19. Trouvez l'inverse de Moore-Penrose de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Nous continuons par démontrer quelques propriétés des $g-$inverses qui seront utilisées dans la suite du problème.

20. Considérons $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $\boldsymbol{X}$ une matrice d'ordre $m \times n$. Montrez que les assertions suivantes sont vraies :

(1) $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{X'X})$.

(2) Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des matrices telles que le produit $\boldsymbol{AX^{-}B}$ existe. La matrice $\boldsymbol{AX^{-}B}$ ne dépend pas du $g-$inverse $\boldsymbol{X^{-}}$ de $\boldsymbol{X}$ si $\mathcal{C}(\boldsymbol{B}) \subset \mathcal{C}(\boldsymbol{X})$ et $\mathcal{L}(\boldsymbol{A}) \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$.

(3) La matrice $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'}$ ne dépend pas du choix du $g-$inverse $(\boldsymbol{X'X})^{-}$ de $\boldsymbol{X'X}$.

(4) Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. La projection orthogonale de $\boldsymbol{y}$ sur $\mathcal{C}(\boldsymbol{X})$ est égale à $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'y}$ où $(\boldsymbol{X'X})^{-}$ est un des $g-$inverses de $\boldsymbol{X'X}$.

(5) $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'X} = \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X'X}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{X'}$.

(6) $\boldsymbol{X}^{+} = (\boldsymbol{X'X})^{+}\boldsymbol{X'}$ et $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-}\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{XX}^{+}$.

Partie 2. Modèle linéaire et estimation

Soit $\boldsymbol{y}$ un vecteur de composantes $y_1, \ldots, y_n$. $\boldsymbol{y}$ est un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^n$ si chacun des y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est une variable aléatoire réelle. Nous notons, lorsque ces quantités existent, $\mathbb{E}[\boldsymbol{y}]$ l'espérance du vecteur $\boldsymbol{y}$ et $\mathbb{D}[\boldsymbol{y}]$ sa matrice de dispersion également appelée sa matrice de variance-covariance.
Nous supposons dans toute la suite de ce problème que $\boldsymbol{y}$ désigne un vecteur aléatoire à n composantes $(y_1, \ldots, y_n)$ qui admet une espérance et une matrice de dispersion.

1. Montrez que la matrice $\mathbb{D}[\boldsymbol{y}]$ est semi-définie positive et qu'elle est définie positive si et seulement s'il n'existe pas de combinaison linéaire des composantes de $\boldsymbol{y}$ presque sûrement constante. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $n \times p$, avec $n, p \in \mathbb{N}^{\star}$, dont les composantes ne sont pas aléatoires. Montrez que $\mathbb{D}[\boldsymbol{Ay}] = \boldsymbol{A}\mathbb{D}[\boldsymbol{y}]\boldsymbol{A'}$.

Nous supposons désormais que l'espérance du vecteur $\boldsymbol{y}$ est une fonction linéaire des paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_p$, les coefficients intervenant dans l'expression de cette relation étant connus. Nous nous plaçons donc dans le cadre d'un modèle linéaire qui s'exprime matriciellement de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{X\beta},$$

où $\boldsymbol{X}$ est une matrice d'ordre $n \times p$, avec $n, p \in \mathbb{N}^{\star}$, et $\boldsymbol{\beta}$ est le vecteur des paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_p$.
Nous supposons de surcroît que les composantes $y_1, \ldots, y_n$ ne sont pas corrélées et que leurs variances sont toutes égales à σ^2. Cette hypothèse n'est rien d'autre que l'hypothèse usuelle d'homoscédasticité : $\mathbb{D}[\boldsymbol{y}] = \sigma^2 \boldsymbol{I_n}$.
Une manière équivalente de mettre en équation ce modèle linéaire est d'écrire :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{5}$$

où le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\epsilon}$ vérifie $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = 0$ et $\mathbb{D}[\boldsymbol{\epsilon}] = \sigma^2 \boldsymbol{I_n}$.
Nous cherchons, sans faire d'hypothèse supplémentaire sur la loi du vecteur $\boldsymbol{y}$, à trouver des estimateurs des paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_p$ et de combinaisons linéaires de ces paramètres. Nous cherchons aussi un estimateur de σ^2 qui est un paramètre additionnel du modèle.

Soit $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^p$. Une combinaison linéaire $\boldsymbol{l'\beta}$ des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ est dite estimable s'il existe une combinaison linéaire $\boldsymbol{c'y}$ des observations $\boldsymbol{y}$ telle que $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{c'y}\right] = \boldsymbol{l'\beta}$ pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$.

2. Montrez qu'une combinaison linéaire $\boldsymbol{l'\beta}$ des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ est estimable si et seulement si $\boldsymbol{l'} \in \mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}\right)$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\boldsymbol{l'} = \boldsymbol{u'X}$.

3. Montrez que pour chaque vecteur $\boldsymbol{l}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- **(1)** $\boldsymbol{l'\beta}$ est estimable.
- **(2)** $\boldsymbol{l'} = \boldsymbol{l'X^-X}$ où $\boldsymbol{X^-}$ est l'un quelconque des $g-$inverses de $\boldsymbol{X}$.
- **(3)** $\boldsymbol{l'}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^- \boldsymbol{X'X} = \boldsymbol{l'}$ où $\left(\boldsymbol{X'X}\right)^-$ est l'un quelconque des $g-$inverses de $\boldsymbol{X'X}$.

4. Soit $\boldsymbol{l'\beta}$ une combinaison linéaire estimable des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{G}$ un $g-$inverse des moindres carrés de $\boldsymbol{X}$. Montrez que la statistique $\boldsymbol{l'Gy}$ est un estimateur linéaire sans biais de $\boldsymbol{l'\beta}$ dont la variance est minimale parmi la classe des estimateurs linéaires sans biais de $\boldsymbol{l'\beta}$.
Nous disons alors que $\boldsymbol{l'Gy}$ est un parmi les Meilleurs Estimateurs Linéaires Sans Biais (MELSB) de $\boldsymbol{l'\beta}$, en anglais nous parlerions de BLUE (Best Linear Unbiased Estimate) de $\boldsymbol{l'\beta}$. La variance de $\boldsymbol{l'Gy}$ est égale à $\sigma^2\boldsymbol{l'}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^- \boldsymbol{l}$.

5. Considérons le modèle :

$$\mathbb{E}\left[y_{ij}\right] = \alpha_i + \beta_j, \quad i = 1, 2,\ j = 1, 2.$$

Montrez que l'expression matricielle standard du modèle met en jeu la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrez que $\mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}\right) = \left\{(l_1, l_2, m_1, m_2) \in \mathbb{R}^4 \mid l_1 + l_2 = m_1 + m_2\right\}$. Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante pour que la combinaison linéaire $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + m_1\beta_1 + m_2\beta_2$ soit estimable. Calculez ensuite le MELSB de l'une quelconque des fonctions $\boldsymbol{u'X\beta}$ où $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ puis donnez par exemple le MELSB de $\alpha_1 + \beta_1$.

6. Montrez que le MELSB d'une fonction estimable est unique c'est-à-dire que si $\boldsymbol{l'\beta}$ est une fonction estimable et si $\boldsymbol{c'y}$ et $\boldsymbol{d'y}$ sont deux MELSB de $\boldsymbol{l'\beta}$ alors $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$.

Le modèle linéaire (5) est dit régulier lorsque le rang de $\boldsymbol{X}$ est égal au nombre p de paramètres $\beta_1, \ldots, \beta_p$ du modèle.

7. Montrez que pour un modèle linéaire régulier les propriétés suivantes sont vraies.

- **(1)** $\mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}\right) = \mathbb{R}^p$ et de ce fait toute fonction $\boldsymbol{l'\beta}$ est estimable.
- **(2)** $\boldsymbol{X'X}$ est inversible.
- **(3)** Si $\widehat{\beta_i}$ est le MELSB de β_i et $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ le vecteur de composantes $\widehat{\beta_1},\ldots,\widehat{\beta_p}$, alors $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{X'y}$. La matrice de dispersion de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ est égale à $\sigma^2\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-\mathbf{1}}$.

(4) Le MELSB de $\boldsymbol{l'\beta}$ est $\boldsymbol{l'}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ de variance $\sigma^2\boldsymbol{l'}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-1}\boldsymbol{l}$.

Nous retrouvons avec les résultats **7.(3)** et **7.(4)** une forme du théorème de Gauss-Markov.

8. Quelques applications des résultats précédents :

(1) Considérez le modèle linéaire $\mathbb{E}\left[y_1\right] = 2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, $\mathbb{E}\left[y_2\right] = \beta_2 - \beta_4$, $\mathbb{E}\left[y_3\right] = \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_4$ complété par les hypothèses usuelles. Quelles sont les fonctions linéaires des paramètres qui sont estimables ?

(2) Considérez le modèle linéaire $\mathbb{E}\left[y_1\right] = \beta_1 + \beta_2$, $\mathbb{E}\left[y_2\right] = \beta_1 - \beta_2$, $\mathbb{E}\left[y_3\right] = \beta_1 + 2\beta_2$ complété par les hypothèses usuelles. Déterminez le MELSB de $2\beta_1 + \beta_2$. Calculez sa variance.

(3) Considérez le modèle linéaire $\mathbb{E}\left[y_1\right] = 2\beta_1 + \beta_2$, $\mathbb{E}\left[y_2\right] = \beta_1 - \beta_2$, $\mathbb{E}\left[y_3\right] = \beta_1 + \alpha\beta_2$ complété par les hypothèses usuelles. Trouvez α tel que les MELSB de β_1 et β_2 ne soient pas corrélés.

Nous commençons par établir une inégalité classique.

9. (Inégalité de Hadamard.)
Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice semi-définie positive et a_{11}, $\ldots$, a_{nn} les éléments de sa diagonale principale. Montrez l'inégalité suivante :

$$|\boldsymbol{A}| \leqslant a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Montrez que si $\boldsymbol{A}$ est définie positive alors l'égalité est réalisée dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si $\boldsymbol{A}$ est une matrice diagonale.

10. Soit $\boldsymbol{X}$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients x_{ij} vérifient $|x_{ij}| \leqslant 1$, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Montrez que :

$$|\boldsymbol{X'X}| \leqslant n^n.$$

Supposons que nous devions peser n objets avec une balance ayant deux plateaux en réalisant au maximum n pesées. À chacune des pesées, nous pouvons répartir tous ou une partie des objets sur l'un ou l'autre des deux plateaux de la balance. Cette répartition des objets est appelée un *plan pour pesée*. Soit β_1, β_2, ... , et β_n les poids, inconnus, des objets. Nous posons $x_{ij} = 1$ si le $j-$ème objet est dans le plateau de droite au cours de la $i-$ème pesée, $x_{ij} = -1$ si le $j-$ème objet est dans le plateau de gauche au cours de la $i-$ème pesée et $x_{ij} = 0$ si le $j-$ème objet n'est pas utilisé lors de la $i-$ème pesée. Afin d'équilibrer les deux plateaux de la balance lors de la $i-$ème pesée il est possible de rajouter une masse à l'un des deux plateaux de la balance. Le signe de cette masse dépend du plateau sur lequel elle a été posée : positif si elle se trouve sur le plateau de gauche et négatif si elle se trouve sur le plateau de droite. Nous désignons par y_i cette masse signée utilisée lors de la $i-$ème pesée.
Nous aboutissons ainsi naturellement à un modèle linéaire :

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{y}\right] = \boldsymbol{X\beta}$$

où $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
Nous supposons que les composantes y_i ne sont pas corrélées et de même variance σ^2.

11. En faisant l'hypothèse supplémentaire que le modèle est régulier, donnez $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ le MELSB de $\boldsymbol{\beta}$ et montrez que sa dispersion $\mathbb{D}\left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$ est égale à $\sigma^2\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{\mathbf{-1}}$.

Il apparaît donc que pour rendre le plan pour pesée le plus précis possible, c'est-à-dire rendre « petite » la variance de l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, il est judicieux de rendre le produit $\boldsymbol{X'X}$ « grand ». Une manière naturelle de mesurer la taille d'une matrice semi-définie positive est de calculer son déterminant. Il faut ainsi construire un plan pour pesée, c'est-à-dire une matrice $\boldsymbol{X}$, telle que la valeur du déterminant de $\boldsymbol{X'X}$ soit maximale. Une telle matrice, si elle existe, est qualifiée de $D-$optimale. Dans le cas d'un modèle linéaire gaussien, cette mesure sera directement liée au volume de l'ellipsoïde de confiance construit autour des paramètres du modèle.

12. Considérons quatre objets et quatre pesées à réaliser. Montrer que, dans ce contexte, la matrice $\boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ définit un plan pour pesée $D-$optimal.

13. En utilisant la matrice $\boldsymbol{X_1}$, montrez qu'il existe des plans pour pesée $D-$optimaux dès que $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$.

Revenons aux propriétés du modèle linéaire (5). Nous nous intéressons désormais aux propriétés de la somme des carrés résiduelle (SCR). Considérons un estimateur $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ solution des équations normales $\boldsymbol{X'X\beta} = \boldsymbol{X'y}$.

14. Pourquoi les équations normales sont-elles compatibles ? Montrez qu'il existe un $g-$inverse de $\boldsymbol{X'X}$ tel que $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-}\boldsymbol{X'y}$.

La somme des carrés résiduelle (SCR) est définie par :

$$\mathrm{SCR}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

15. Montrez que, à la différence de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, la SCR ne dépend pas du $g-$inverse $\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-}$ choisi.

16. Montrez que le minimum $\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^p}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\right)$ est atteint en $\boldsymbol{\beta} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

17. Montrez que l'égalité suivante est vraie :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{SCR}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right] = (n - \mathrm{R}\left(\boldsymbol{X}\right))\sigma^2.$$

Déduisez-en un estimateur sans biais de σ^2.

18. Considérons le modèle $\mathbb{E}\left[y_1\right] = \beta_1 + \beta_2$, $\mathbb{E}\left[y_2\right] = 2\beta_1$ et $\mathbb{E}\left[y_3\right] = \beta_1 - \beta_2$ complété par les hypothèses usuelles. Déterminez la somme des carrés résiduelle du modèle.

19. Considérons le modèle :

$$y_{ij} = \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

où les variables aléatoires ϵ_{ij} sont indépendantes centrées et de variance σ^2. Déterminez $\widehat{\beta}$ le MELSB de β, la SCR et un estimateur sans biais de σ^2.

20. Considérons le modèle :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

où les variables aléatoires ϵ_{ij} sont indépendantes centrées et de variance σ^2. Le paramètre μ est souvent appelé l'effet général.
Quelles sont les fonctions linéaires des paramètres qui sont estimables ?
Soit la grande moyenne $\overline{y_{\bullet\bullet}}$ définie par :

$$\overline{y_{\bullet\bullet}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

La grande moyenne $\overline{y_{\bullet\bullet}}$ est-elle un estimateur sans biais de μ ?

Considérons le modèle linéaire usuel $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{y}\right] = \boldsymbol{X\beta}$, $\mathbb{D}\left[\boldsymbol{y}\right] = \sigma^2 \boldsymbol{I_n}$, où $\boldsymbol{y}$ est un vecteur à coefficients réels de taille n et $\boldsymbol{X}$ une matrice à coefficients réels d'ordre $n \times p$. Supposons qu'il existe de surcroît des contraintes linéaires sur le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ des paramètres du modèle qui s'expriment de la manière suivante :

$$\boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}$$

où $\boldsymbol{z}$ est un vecteur à coefficients réels de taille m et $\boldsymbol{L}$ est une matrice à coefficients réels d'ordre $m \times p$ telle que $\mathcal{L}\left(\boldsymbol{L}\right) \subset \mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}\right)$ et que les équations $\boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}$ sont compatibles.

21. Montrez que le minimum $\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | \boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}} \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\right)' \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\right)$ est atteint en $\boldsymbol{\beta} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ avec

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-} \boldsymbol{L'} \left(\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-} \boldsymbol{L'}\right)^{-} \left(\boldsymbol{L}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{z}\right)$$

où $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-} \boldsymbol{X'y}$ pour un $g-$inverse $\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-}$ de $\boldsymbol{X'X}$ fixé.

22. Montrez que $\mathrm{R}\left(\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{L'}\right) = \mathrm{R}\left(\boldsymbol{L}\right)$. Déduisez-en que lorsque le modèle linéaire est régulier et que la matrice $\boldsymbol{L}$ est de rang m, la matrice $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{X'X}\right)^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{L'}$ est inversible.

23. Considérons le modèle linéaire $\mathbb{E}\left[y_i\right] = \theta_i$, $i = 1, \ldots, 4$, où les y_i ne sont pas corrélés et ont la même variance σ^2. Nous souhaitons respecter la contrainte linéaire supplémentaire suivante sur les paramètres : $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$. Après avoir mis sous forme matricielle le modèle et les contraintes sur les paramètres, calculez l'estimateur $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ et montrez que la somme des carrés résiduelle est égale à $4\overline{y}^2$.

24. Le modèle (6) est utilisé pour comparer k traitements :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n_i, \tag{6}$$

où μ désigne l'effet général, α_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, l'effet dû au $i-$ème traitement et les variables aléatoires ϵ_{ij} sont indépendantes centrées et de variance σ^2. Calculez la somme des carrés résiduelle sans contrainte supplémentaire sur les paramètres μ, α_1, …, α_k puis en ajoutant soit la contrainte $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$ soit la contrainte $\alpha_i - \alpha_j = 0$, pour tout les $1 \leqslant i, j \leqslant k$.

25. Considérons le modèle linéaire $\mathbb{E}[y_1] = \beta_1 + 2\beta_2$, $\mathbb{E}[y_2] = 2\beta_1$, $\mathbb{E}[y_3] = \beta_1 + \beta_2$ complété par les hypothèses usuelles et la contrainte sur les paramètres : $\beta_1 = \beta_2$. Calculez la somme des carrés résiduelle.

26. Pour $k \geqslant 2$, considérons le modèle :

$$y_{ij} = \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

où les variables aléatoires ϵ_{ij} sont indépendantes centrées et de variance σ^2. Calculez la somme des carrés résiduelle avec la contrainte supplémentaire : $\alpha_1 = \alpha_2$.

27. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels non tous égaux et de moyenne $\overline{x}$. Considérons le modèle linéaire $Y_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x}) + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, complété par les hypothèses usuelles. Quels sont les MELSB de α et de β ? Montrez qu'ils ne sont pas corrélés. Quelle est la somme des carrés résiduelle ?

28. Soit x_i, y_i, z_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $3n$ variables aléatoires indépendantes, de même variance σ^2 et d'espérance $\mathbb{E}[x_i] = \theta_1$, $\mathbb{E}[y_i] = \theta_2$, $\mathbb{E}[z_i] = \theta_1 - \theta_2$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Déterminez les MELSB de θ_1 et de θ_2 et calculez la somme des carrés résiduelle.
Supposons qu'il existe de surcroît la contrainte suivante sur les paramètres : $\theta_1 = \theta_2$. Calculez, dans ce nouveau cas, la somme des carrés résiduelle.

Pour les questions restantes nous ajoutons une hypothèse de normalité au modèle linéaire (5) :

$$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{\mathcal{N}_n}\left(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I_n}\right),$$

où $\mathrm{R}(\boldsymbol{X}) = r$.
La somme des carrés résiduelle (SCR) est définie par :

$$\mathrm{SCR} = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})' (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}).$$

29. Montrez que la loi de SCR/σ^2 est une loi du χ^2 à $(n - r)$ degrés de liberté.

Considérons l'hypothèse $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}$ en supposant de surcroît que $\mathcal{L}(\boldsymbol{L}) \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ et que le système d'équations $\boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}$ est compatible.
La somme des carrés résiduelle contrainte ($\mathrm{SCR}_{\mathcal{H}}$) est définie par :

$$\mathrm{SCR}_{\mathcal{H}} = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | \boldsymbol{L\beta} = \boldsymbol{z}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})' (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}).$$

30. Montrez que la loi du rapport

$$\frac{(\mathrm{SCR}_{\mathcal{H}} - \mathrm{SCR}) / \mathrm{R}(\boldsymbol{L})}{\mathrm{SCR}/(n - r)}$$

est une loi de Fisher à $\mathrm{R}(\boldsymbol{L})$ degrés de liberté au numérateur et à $(n-r)$ degrés de liberté au dénominateur. Expliquez comment il est possible d'utiliser cette statistique pour tester l'hypothèse $\mathcal{H}$.

31. Considérons le modèle linéaire $y_1 = \theta_1 + \theta_2 + \epsilon_1$, $y_2 = 2\theta_1 + \epsilon_2$, $y_3 = \theta_1 - \theta_2 + \epsilon_3$, où ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 sont des variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Déterminez une statistique permettant de tester l'hypothèse $\theta_1 = \theta_2$ en utilisant les résultats de la question **30.**