T. D. nº 2
Quelques exercices sur la loi du χ^2

Exercice 1 Une loi du chi-deux à 8 ddl. D'après le livre de M. Gaultier « Probabilités - 70 exercices corrigés avec résumés de cours », collection « Les sciences en fac », Vuibert.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi de Pearson (ou loi du chi-deux) à 8 degrés de liberté.

1. Quelle est la valeur de X de plus grande densité de probabilité ? Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. On désigne par $x_1 = x_1(\alpha)$ et $x_2 = x_2(\alpha)$ les deux nombres positifs tels que
$$\mathbb{P}_X\left([0,x_1[\right) = \mathbb{P}_X\left(]x_2,+\infty[\right) = \frac{\alpha}{2}.$$
Que vaut $\mathbb{P}_X\left([x_1,x_2]\right)$? Quelles sont les limites de x_1 et de x_2 lorsque α tend vers 0 ? Écrire les valeurs de x_1 et x_2 pour les quatre valeurs de α suivantes :
$$0,02 \quad 0,05 \quad 0,10 \quad 0,20.$$

Exercice 2 Approximation de la loi du chi-deux. D'après le livre de T. Phan et J.-P. Rowenczyk « Statistique et probabilités », Dunod.

1. Montrer que, lorsque n est très grand, on peut utiliser l'approximation suivante de la loi du χ^2 :
$$\chi^2(n) = \mathcal{N}(n, \sqrt{2n}).$$
2. On considère n réalisations indépendantes X_i d'une variable aléatoire X suivant une $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.
En utilisant l'approximation définie à la question 1, trouver la valeur de n, (α et ε étant donnés), telle que :
$$\mathbb{P}\left[\sigma^2(1-\varepsilon) < S^{*2} < \sigma^2(1+\varepsilon)\right] = 1-\alpha$$
où $S^{*2} = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.
3. Applications numériques avec $\alpha = \varepsilon = 0,05$ ou $\alpha = \varepsilon = 0,01$.

Exercice 3 Un exercice un peu théorique. D'après le livre de Fourdrinier, « Statistique inférentielle », Dunod.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Montrer que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^{*2}$$

suit une loi du χ^2_{n-1}.