

T. D. n^o 4

Exercices sur des résultats divers

Exercice 1 Propriétés sur la moyenne et la variance d'un échantillon

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d d'espérance μ et d'écart-type σ . Notons

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

1. Moyenne empirique.
 - a. Calculer l'espérance de \bar{X} .
 - b. Calculer la variance de \bar{X} .
2. Variance empirique.
 - a. Calculer l'espérance de S^{*2} .
 - b. Calculer la variance de S^{*2} .
3. Dans cette question, nous supposons que les variables aléatoires suivent une loi normale. Répondre aux questions 1.a., 1.b, 2.a, 2.b dans ce cas précis. Qu'observez-vous ?

Exercice 2 Le théorème de Fisher

Soit (X_1, \dots, X_n) une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Nous posons alors les variables aléatoires

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\text{et} \quad \Sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

1. Quelle est la loi de \bar{X} ?
2. Quelle est la loi de $n\Sigma^2/\sigma^2$?
3. Montrer que \bar{X} et S^{*2} sont indépendantes.
4. Montrer que $(n-1)S^{*2}/\sigma^2$ suit une loi $\chi^2(n-1)$.

Exercice 3 Une réciproque au théorème de Fisher

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de carré intégrable, d'espérance m , de variance σ^2 . On suppose que la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et la variance empirique $V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ sont des variables indépendantes. Le but de cet exercice est de démontrer que la loi de X_i est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Notons ψ la fonction caractéristique de X_i et supposons $m = 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}[(n-1)V_n]$ en fonction de σ^2 . Montrer que pour tout réel t ,

$$\mathbb{E}[(n-1)V_n e^{itn\bar{X}_n}] = (n-1)\psi(t)^n \sigma^2.$$

2. En développant V_n dans l'égalité précédente, vérifier que

$$\mathbb{E}[(n-1)V_n e^{itn\bar{X}_n}] = -(n-1)\psi''(t)\psi(t)^{n-1} - (n-1)\psi'(t)^2\psi(t)^{n-2}.$$

3. En déduire que ψ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{\psi^2} = -\sigma^2, \\ \psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = 0. \end{cases}$$

4. En déduire que la loi des variables X_i est la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
5. Que faire si nous ne supposons plus que $m = 0$.

Exercice 4 Un résultat du cours

Démontrer la proposition suivante.

Proposition : Soient une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée-réduite et X une variable suivant indépendamment de U une loi χ_n^2 . Alors la variable aléatoire

$$T_n = \frac{U}{\sqrt{X/n}}$$

suit la loi de Student à n degrés de liberté.

De plus, si (X_1, \dots, X_n) est une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 , alors la variable aléatoire

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}}$$

suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté, où

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$