Devoir en temps libre

Algèbres de Jordan et applications en statistique

Magistère 2ème année 2010-2011

Ce devoir est à rédiger pour le lundi 29 août 2011.
Il peut être :

- déposé dans mon casier à l'IRMA,
- rendu par voie électronique à l'adresse électronique : `frederic.bertrand@math.u-strasbg.fr`,
- rendu par voie postale à l'adresse suivante :
Frédéric Bertrand
Université de Strasbourg
IRMA
7, rue Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Notation : Dans le problème suivant, si $(\mathbb{M}, \times)$ est un magma associatif, a, b des éléments de $\mathbb{M}$ et $\boldsymbol{S}$ une partie de $\mathbb{M}$ alors l'égalité $a\boldsymbol{S}b = 0$ signifie que pour tout élément s de $\boldsymbol{S}$, $asb = 0$. La matrice identité d'ordre $k \in \mathbb{N}^\star$ sera désignée par $\boldsymbol{I_k}$.

Partie 1. Inverses généralisés de Moore-Penrose.
Les résultats suivants concernent les inverses généralisés de Moore-Penrose et sont admis. Ils ont été démontrés lors d'une étude détaillée des inverses généralisés qui a été ménée dans le devoir en temps libre l'année 2009-2010.

Définition : Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et A une matrice d'ordre $m \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Une matrice G est un *inverse de Moore-Penrose* de A si :

$$AGA = A \tag{1}$$
$$GAG = G \tag{2}$$
$$(AG)' = AG \tag{3}$$
$$(GA)' = GA. \tag{4}$$

Théorème 1 : Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et A une matrice d'ordre $m \times n$. Il existe un unique inverse de Moore-Penrose de A. Il est noté A^+.
Propriétés : Considérons $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et X une matrice d'ordre $m \times n$. Les assertions suivantes sont vraies :

(1) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. La projection orthogonale de y sur $\mathcal{C}(X)$, l'espace vectoriel engendré par les colonnes de X, est égale à $X(X'X)^+ X'y$.

(2) $X(X'X)^+ X'X = X$ et $X'X(X'X)^+ X' = X'$.

(3) $X^+ = (X'X)^+ X'$.

Partie 2. Résultats préliminaires.

Dans la suite $\mathbb{K}$ désignera un corps et en particulier $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la suite nous appelons $\mathbb{K}$-algèbre un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel $(A, +, \cdot)$ muni d'une seconde loi de composition interne appelée multiplication, notée $*$ et qui est distributive par rapport à l'addition. Par conséquent,

$$\begin{array}{ll} \lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b & \lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b) \\ a * (b+c) = a * b + a * c & (b+c) * a = b * a + c * a \end{array}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(a, b, c) \in A^3$.
$(A, +, *, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre réelle si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et une $\mathbb{K}$-algèbre complexe si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Dans la suite, la dimension d'une $\mathbb{K}$-algèbre A est sa dimension en tant que $\mathbb{K}$-espace-vectoriel et est notée $\dim A$.

Remarque :

a) La multiplication n'est pas nécessairement commutative $a * b = b * a$.

b) La multiplication n'est pas nécessairement associative $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Exemple : La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associative mais non commutative si $n \geqslant 2$.

Une algèbre de Jordan est une $\mathbb{K}$-algèbre $(A, +, \bullet, \cdot)$ qui vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes :

J1 : $a \bullet b = b \bullet a$, $\forall\ (a, b) \in A^2$.

J2 : $a^{2\bullet} \bullet (b \bullet a) = (a^{2\bullet} \bullet b) \bullet a$, $\forall\ (a, b) \in A^2$ avec $a^{2\bullet} = a \bullet a$.

Remarque : Une algèbre de Jordan est donc commutative mais non nécessairement associative pour la loi $\bullet$.
Exemple : L'ensemble des matrices symétriques réelles, noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, muni du produit de Jordan défini, pour tout $(a, b) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, par :

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

où, pour deux éléments c et d de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cd désigne le produit de c par d au sens de la multiplication usuelle des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Jordan.
La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est : $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Dans la suite, lorsque le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté implicitement, il désignera toujours le produit usuel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Rien n'empêche d'étendre la définition du produit de Jordan au cas d'un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de deux. Le produit de Jordan de deux éléments a et b de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est défini par :

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Remarque : Une algèbre de Jordan réelle $(A, +, *, \cdot)$ n'est pas nécessairement isomorphe, en tant qu'algèbre, à une sous-algèbre de $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \bullet, \cdot)$ où $\bullet$ est le produit de Jordan défini ci-dessus. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, l'algèbre $(A, +, *, \cdot)$

est dite spéciale. Rien n'empêche également d'étendre cette définition au cas d'un corps de base $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de deux.
L'égalité suivante est vérifiée pour toutes les algèbres spéciales de Jordan :

$$a^{2\bullet} = a \bullet a = \frac{1}{2}(a^2 + a^2) = a^2.$$

Exemples :

1. Soit $\boldsymbol{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ engendré par la matrice identité d'ordre 2, $\boldsymbol{I_2}$, et $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner la forme générale des éléments s de $\boldsymbol{S}$ puis montrer que $(\boldsymbol{S}, +, \bullet)$ est une algèbre spéciale de Jordan réelle.
2. Soit $\boldsymbol{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ engendré par la matrice identité d'ordre 3, $\boldsymbol{I_3}$, et $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner la forme générale des éléments t de $\boldsymbol{T}$, examiner si les propriétés **J1** et **J2** sont vérifiées. En déduire que $(\boldsymbol{T}, +, \bullet)$ n'est pas une algèbre de Jordan réelle.

Définition : Un élément e d'un sous-espace vectoriel $\boldsymbol{S}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une unité associative de $\boldsymbol{S}$ si, pour tout $s \in \boldsymbol{S}$, $es = se = s$.
Remarque : Si $\boldsymbol{S}$ est un sous-espace propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'est pas possible d'affirmer que l'unité associative de $\boldsymbol{S}$ est $\boldsymbol{I_n}$, la matrice identité d'ordre n, comme le montre l'exemple suivant qui est associé à une problématique statistique.
Soit Y un vecteur aléatoire à n composantes d'espérance $X\mu$ et de matrice de variance-covariance V. Supposons que $\text{rg}X < n$ et que V soit définie positive et puisse s'écrire

$$V = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i$$

avec $G_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \geqslant i \geqslant k$. Considérons $\boldsymbol{S} = \text{Vect}(G_1, \ldots, G_k)$ et

$$M = I_n - X({}^tXX)^{+t}X$$

où $({}^tXX)^+$ est l'inverse généralisé de Moore-Penrose de ${}^tXX$. M est la projection sur le supplémentaire orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de X.

3. Montrer que le vecteur aléatoire $Y^* = MY$ est d'espérance nulle et de matrice de variance-covariance V^* égale à MVM.

V^* est un élément de $\boldsymbol{S^*}$, l'ensemble des matrices de la forme MsM lorsque s décrit $\boldsymbol{S}$.

4. Montrer que M est une unité associative de $\boldsymbol{S^*}$ et que $\boldsymbol{I_n} \notin \boldsymbol{S^*}$.

Définition : Un élément e de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $e^2 = e$ est dit idempotent associatif.
Définition : Un élément e d'une algèbre de Jordan $(A, +, *, \cdot)$ tel que $e^{2*} = e$ est dit idempotent de Jordan.

5. Montrer que, dans une algèbre de Jordan spéciale $(A, +, \bullet, \cdot)$, les éléments idempotents de Jordan et associatifs sont identiques.

Lemme 1 : Soit $\boldsymbol{S}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $e \in \boldsymbol{S}$ un élément idempotent. Si $e \bullet s = s$ pour un $s \in \boldsymbol{S}$, alors $e \bullet s = es = se = s$.

6. Montrer le **Lemme 1**. *Indication : Commencer par montrer* $aba = 2a \bullet (a \bullet b) - a^2 \bullet b$.

7. En déduire que les unités associatives et les unités de Jordan d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont identiques.

8. Montrer le **Lemme 2** suivant.

Lemme 2 : Soit $\boldsymbol{S}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $e \in \boldsymbol{S}$.

a) $e \bullet s = s$ pour tout $s \in \boldsymbol{S}$ si et seulement si $es = s = se$ pour tout $s \in \boldsymbol{S}$.

b) Dans les algèbres spéciales de Jordan, les éléments idempotents sont Jordan-orthogonaux si et seulement s'ils sont orthogonaux au sens usuel : si e_1, e_2 sont des éléments idempotents alors $e_1 \bullet e_2 = 0 \Leftrightarrow e_1 e_2 = 0$.

c) Des sous-espaces vectoriels $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ sont dits Jordan-orthogonaux si pour tout $s \in \boldsymbol{S}$ et tout $t \in \boldsymbol{T}$, $s \bullet t = 0$, cette propriété est notée $\boldsymbol{S} \bullet \boldsymbol{T} = 0$. Des sous-espaces vectoriels $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{T}$ possédant une unité $s_1 \in \boldsymbol{S}$ et $t_1 \in \boldsymbol{T}$ sont Jordan-orthogonaux si et seulement s'ils sont orthogonaux pour la loi multiplicative usuelle : $\boldsymbol{ST} = \boldsymbol{TS} = 0$ ou encore $st = ts = 0$, pour tout $s \in \boldsymbol{S}$ et tout $t \in \boldsymbol{T}$.

Partie 3. Définitions équivalentes d'une algèbre de Jordan.

Lemme 3 : Soit $\boldsymbol{S}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $\boldsymbol{S}$ possède une unité e. $\boldsymbol{S}$ est une algèbre de Jordan si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

a) $ab + ba \in \boldsymbol{S}$, pour tout a et b dans $\boldsymbol{S}$.

b) $aba \in \boldsymbol{S}$, pour tout a et b dans $\boldsymbol{S}$.

c) $a^2 \in \boldsymbol{S}$, pour tout $a \in \boldsymbol{S}$.

9. Montrer le **Lemme 3**.

10. Montrer que si a appartient à une algèbre de Jordan réelle $\boldsymbol{S}$, alors $\mathbb{R}[a] \subset \boldsymbol{S}$, où $\mathbb{K}[a]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes en a à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Lemme 4 : Soit $\boldsymbol{S}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si la matrice identité d'ordre n, $\boldsymbol{I_n}$, appartient à $\boldsymbol{S}$ alors :

a) $\boldsymbol{S}$ est une algèbre spéciale de Jordan si et seulement elle contient l'inverse généralisé de Moore-Penrose s^+ de chaque élément $s \in \boldsymbol{S}$.

b) $\boldsymbol{S}$ contient tous les inverses s^{-1} des éléments inversibles $s \in \boldsymbol{S}$ si et seulement si elle contient tous les inverses généralisés de Moore-Penrose s^+ des éléments $s \in \boldsymbol{S}$.

c) $\boldsymbol{S}$ contient tous les inverses s^{-1} des éléments inversibles $s \in \boldsymbol{S}$ si et seulement si elle contient les inverses d^{-1} de tous les éléments définis positifs de $d \in \boldsymbol{S}$.

L'objectif des questions **11.** à **14.** est de montrer le **Lemme 4**.

11. Vérifier que si $\boldsymbol{S}$ contient tous les inverses généralisés de Moore-Penrose des éléments s de $\boldsymbol{S}$ alors $\boldsymbol{S}$ contient tous les inverses s^{-1} des éléments inversibles $s \in \boldsymbol{S}$ et que si $\boldsymbol{S}$ contient tous les inverses s^{-1} des éléments inversibles $s \in \boldsymbol{S}$ elle contient les inverses d^{-1} de tous les éléments définis positifs de $d \in \boldsymbol{S}$.

12. Soient a et b deux éléments inversibles de $\boldsymbol{S}$ avec $a \neq b^{-1}$. Montrer l'identité de Hua :

$$a - (a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1})^{-1} = aba.$$

13. Soit $c \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En utilisant l'égalité

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{{}^t xcx}{{}^t xx} = \lambda_{max}$$

où λ_{max} est la plus grande des valeurs propres de c, montrer que, pour $\zeta \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit, $\boldsymbol{I_n} - \zeta c$ est définie positive. Soit ζ_0 l'une de ces valeurs. De la même manière, montrer que, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit, $\boldsymbol{I_n} - t(\boldsymbol{I_n} - \zeta_0 c)$ est définie positive et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t(\boldsymbol{I_n} - \zeta_0 c)$ est définie positive. Appliquer l'identité de Hua avec $b = \boldsymbol{I_n}$ et $a = t(\boldsymbol{I_n} - \zeta_0)c$ et en déduire que

$$a - (a^{-1} + (I - a)^{-1})^{-1} \in \boldsymbol{S}.$$

Remarquer alors que $a^2 = t^2(I - 2\zeta_0 c + \zeta_0^2 c^2)$. En déduire que $\boldsymbol{S}$ est une algèbre spéciale de Jordan.

14. Montrer que si $s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $s^+ = (s^2)^+ s$. En déduire que

$$a^+ = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{Spec} A \setminus \{0\}}^{n} \frac{1}{\alpha_i^2 h_i} g_i a$$

où Spec$A$ désigne le spectre de A,

$$g_i = \prod_{j \neq i} \left(a^2 - \alpha_j^2 \boldsymbol{I_n}\right) \quad \text{et} \quad h_i = \prod_{j \neq i} \left(\alpha_i^2 - \alpha_j^2\right).$$

15. En déduire que si $\boldsymbol{S}$ est une algèbre spéciale de Jordan, alors elle contient tous les inverses généralisés de Moore-Penrose de ses éléments.

Partie 4. Classification des algèbres de Jordan.

Définition : Une algèbre de Jordan $\boldsymbol{S}$ est dite formellement réelle si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0, \ \forall a, b \in \boldsymbol{S}.$$

16. Montrer que les algèbres spéciales de Jordan réelles sont formellement réelles.

Définition : Un idéal de Jordan $\mathcal{C}$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ de Jordan est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ qui est une algèbre de Jordan telle que

$$a * c \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad c * a \in \mathcal{C}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{C}.$$

Définition : Une algèbre $\mathcal{A}$ de Jordan est simple si $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} * \mathcal{A}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et ne contient aucun idéal de Jordan propre non réduit à $\{0\}$.

17. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Jordan simple.

Définition : Deux sous-espaces vectoriels $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement équivalents s'il existe une matrice u orthogonale telle que

$$\boldsymbol{S}_1 = u\boldsymbol{S}_2{}^t u$$

Théorème 2 (admis) : Soit $\boldsymbol{S}$ une algèbre spéciale de Jordan formellement réelle et de dimension finie. Il existe un entier n tel que $\boldsymbol{S}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\boldsymbol{S}$ est orthogonalement équivalente à une somme directe d'idéaux de Jordan simples $\mathcal{I}$ et a une unité e telle que $e \bullet a = a$ pour tout $a \in \mathcal{I}$. Chacun des idéaux simples de Jordan est isomorphe en tant qu'algèbre de Jordan et orthogonalement équivalent à l'un des quatre types ci-dessous, chacun de ces types pouvant être construit à partir d'espaces de matrices symétriques réelles :

a) $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre m ;

b) $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices complexes auto-adjointes d'ordre $m \geqslant 3$;

c) $\mathcal{Q}_m(\mathbb{H})$, l'ensemble des matrices quaternioniques auto-adjointes d'ordre $m \geqslant 3$;

d) L'algèbre de Jordan $\mathcal{I}(\mathcal{V}, f)$ d'un produit scalaire f défini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$, avec $\dim \mathcal{V} \geqslant 2$. Un élément de $a \in \mathcal{I}(\mathcal{V}, f)$ s'écrit alors $a = (\alpha 1 + x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{V}$. Le produit $\bullet$ de deux éléments $a = (\alpha 1 + x)$ et $b = (\beta 1 + y)$ est défini par

$$(\alpha 1 + x) \bullet (\beta 1 + y) = (\alpha\beta + f(x, y))1 + (\beta x + \alpha y).$$

Plus précisément, l'équivalence orthogonale mentionnée dans le Théorème 2 signifie qu'il existe une matrice u orthogonale et diagonale par bloc $u = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_k)$, avec u_i orthogonale pour $1 \leqslant i \leqslant k$, telle que

$$u\mathcal{I}^t u = \mathrm{diag}(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k)$$

où $\mathrm{diag}(0, \ldots, \mathcal{I}_i, \ldots, 0)$ est la i-ème composante simple de $\mathcal{I}$ et est à choisir parmi les quatre types précédents.

Partie 5. Algèbres de Jordan associées aux matrices symétriques réelles.
Notation : Pour un ensemble $\{a_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{S}\{a_i\}$ désigne $\mathrm{Vect}(a_i, i \in I)$ et $\{m_i^a, i \in I\} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une base de $\boldsymbol{S}\{a_i\}$.

18. Montrer que si $\boldsymbol{I_n} \in \boldsymbol{S}\{a_i\}$, il est possible de supposer que toutes les matrices $\{m_i^a, i \in I\}$ sont définies positives.

Dans la suite de cette partie, $\boldsymbol{S}$ désigne une algèbre spéciale de Jordan réelle et formellement positive. Le Théorème 2 permet d'affirmer que $\boldsymbol{S}$ contient une unité e.

Considérons une partie $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\{m_i\}$. Nous proposons de construire trois nouveaux objets algébriques à partir de $\boldsymbol{S}$.

(I) Soit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})$ la plus petite algèbre associative incluse dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et qui contient $\boldsymbol{S}$. D'un point de vue pratique, cette algèbre peut être vue comme l'espace de tous les polynômes de tous les degrés en les éléments de $\boldsymbol{S}$ puisque $\boldsymbol{S}$ contient une unité e.

(II) Soit $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S})$ le sous-espace de $\boldsymbol{S}$ défini par :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}) = \{b \in \boldsymbol{S} \mid sbs \in \boldsymbol{S},\ \forall s \in \boldsymbol{S}\}.$$

19. Montrer que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S})$ est le sous-espace maximal de $\boldsymbol{S}$ tel que :

$$bsb \in \boldsymbol{B},\ \forall s \in \boldsymbol{S}, b \in \boldsymbol{B}.$$

20. Montrer que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S})$ est une algèbre spéciale de Jordan de dimension finie et formellement réelle.

(III) Soit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ la plus petite algèbre de Jordan incluse dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$, appelée fermeture de Jordan de $\boldsymbol{S}$.

21. Montrer que, pour $\boldsymbol{S}$ fixée, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ est unique et que tout sous-espace $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{J}$ possède un supplémentaire $\boldsymbol{E}^\perp$ inclus dans $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ et orthogonal à $\boldsymbol{E}$ au sens suivant :

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\perp) = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E}^\perp.$$

Proposition 1 : L'ensemble $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) \cap \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Jordan engendrée par les $\{m_i\}$ et tous les tétrades en les m_i, $m_i \neq I$, de la forme :

$$m_{i_1}m_{i_2}m_{i_3}m_{i_4} + m_{i_4}m_{i_3}m_{i_2}m_{i_1}, \qquad \text{pour } i_1 < i_2 < i_3 < i_4.$$

22. Montrer que si $\boldsymbol{S} = \{m_1, m_2, m_3, I\}$, alors $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) \cap \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$.

Le résultat suivant est utile pour déterminer la fermeture de Jordan d'un espace $\boldsymbol{S}$ de petite dimension.

Théorème 3 : Soit $\{m_i\}$ une base de $\boldsymbol{S}$, avec $1 \leqslant i \leqslant k$. Supposons de plus que $m_k = I$. Alors :

(i) Si $k = 1$, alors $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) \cong \mathbb{R}$.

(ii) Si $k = 2$, alors $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ est l'algèbre commutative et associative :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) \cong \bigoplus \mathbb{R},$$

où la somme directe comporte n termes, chacun égaux à $\mathbb{R}$, et où n est le degré du polynôme minimal de m_1. La i-ème composante de la somme est le sous-espace propre de dimension 1

$$\boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{S}(\{E_i\}) \cong \mathbb{R}$$

pour E_i le projecteur associé à la i-ème valeur propre de m_1.

(iii) Soient a et b des idempotents symétriques et $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(a, b)$. Alors $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ se décompose de la manière suivante. Soient $t_1 = aba$, $t_2 = bab$, λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, les valeurs propres non nulles de t_1. Posons :

$$f_1 = (t_1 - \lambda_1)\cdots(t_1 - \lambda_n)\big/\left[(-1)^n\lambda_1 \ldots \lambda_n\right]$$

$$f_2 = (t_2 - \lambda_1)\cdots(t_2 - \lambda_n)\big/\left[(-1)^n\lambda_1 \ldots \lambda_n\right]$$

$$g_1 = af_1 + f_1a, \quad g_2 = bf_2 + f_2b$$

$$\xi_1^{(\alpha)} = t_1 \textstyle\prod_{j\neq\alpha}(t_1 - \lambda_j)\big/\lambda_\alpha \prod_{j\neq\alpha}(\lambda_\alpha - \lambda_j)$$

$$\xi_2^{(\alpha)} = t_2 \textstyle\prod_{j\neq\alpha}(t_2 - \lambda_j)\big/\lambda_\alpha \prod_{j\neq\alpha}(\lambda_\alpha - \lambda_j)$$

$$\psi_\alpha = \xi_1^{(\alpha)} \qquad \text{si } \lambda_\alpha = 1,$$

$$\psi_\alpha = \left(\xi_1^{(\alpha)} - \xi_2^{(\alpha)}\right)^2 \big/(1 - \lambda_\alpha) \qquad \text{si } \lambda_\alpha \neq 1.$$

La décomposition en somme directe de $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}(a,b))$ en idéaux simples est alors :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) = \mathbb{R}g_1 \oplus \mathbb{R}g_2 \oplus (\oplus \Psi_\alpha),$$

où Ψ_α est l'idéal de $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ engendré par Ψ_α. L'un ou les deux termes $\mathbb{R}g_1$ ou $\mathbb{R}g_2$ peuvent être nuls.
Si $\lambda_\alpha = 1$, Ψ_α est l'algèbre de dimension 1

$$\mathbb{R}(\xi_1^{(\alpha)}).$$

Si $\lambda_\alpha \neq 1$, Ψ_α est isomorphe à $\in_2(\mathbb{R})$ et a une base formée des éléments $v_1^{(\alpha)}$, $v_2^{(\alpha)}$ et $v_3^{(\alpha)}$:

$$v_1^{(\alpha)} = (1-\lambda_\alpha)^{-1}\left[\xi_1^{(\alpha)} - \xi_2^{(\alpha)}\xi_1^{(\alpha)}\right]$$
$$v_2^{(\alpha)} = (1-\lambda_\alpha)^{-1}\left[\xi_1^{(\alpha)}\xi_2^{(\alpha)} + \xi_2^{(\alpha)}\xi_1^{(\alpha)} - \lambda_\alpha\left(\xi_1^{(\alpha)} + \xi_2^{(\alpha)}\right)\right]$$
$$v_3^{(\alpha)} = (1-\lambda_\alpha)^{-1}\left[\xi_2^{(\alpha)} - \xi_1^{(\alpha)}\xi_2^{(\alpha)}\right]$$

23. Démontrer les deux premières assertions du Théorème 3.

24. Justifier la chaîne d'inclusions suivantes :

$$\boldsymbol{B}(S) \subseteq \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) \subseteq \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}) \cap \mathcal{S}_m(\mathbb{R}) \subseteq \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}).$$

25. Afin de démontrer la dernière assertion du Théorème 3, commencer par calculer $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})$ puis utiliser la Proposition 1 pour établir l'égalité :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) = \{a + {}^t a \mid a \in \boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})\}.$$

Partie 6. Étude algébrique des formes quadratiques aléatoires

Définition : Si $\boldsymbol{S} = \bigoplus \boldsymbol{S}_i$, le support d'un élément $a \in \boldsymbol{S}$, $a = \sum_i a_i$ avec $a_i \in \boldsymbol{S}_i$, est l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$.
Définition : Deux éléments a et b appartenant à $\boldsymbol{S} = \bigoplus \boldsymbol{S}_i$ ont un support disjoint si $a_i \neq 0 \Rightarrow b_i = 0$ et $b_i \neq 0 \Rightarrow a_i = 0$.

Théorème 4 : Soient $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}) = \{b \in \boldsymbol{S} \mid sbs \in \boldsymbol{S}, \forall s \in \boldsymbol{S}\}$. Si $\boldsymbol{S}$ a une unité alors pour tous éléments a et b de $\boldsymbol{B}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $sasbs = 0, \forall s \in \boldsymbol{S}$;
b) $a\boldsymbol{S}b = 0$;
c) $a\boldsymbol{B}b = 0$;
d) a et b ont un support disjoint dans $\boldsymbol{B}$.

26. Soit G une partie d'une algèbre associative $\mathcal{A}$ telle que G contienne une unité e. Soient a et b deux éléments de G. Montrer que s'il existe deux constantes réelles $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$ telles que pour tout $g \in G$:

$$(\alpha+1)^{-1}[\alpha g + e] \in G \qquad \text{et} \qquad (\beta+1)^{-1}[\beta g + e] \in G$$

alors $gagbg = 0$ pour tout $g \in G$ si et seulement si $aGb = 0$. En déduire l'équivalence des deux premières assertions du Théorème 4.

Théorème 5 : Soient $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ la fermeture de Jordan de $\boldsymbol{S}$. Si $\boldsymbol{S}$ a une unité alors pour tous éléments a et b de $\boldsymbol{J}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $sasbs = 0, \forall s \in \boldsymbol{J}$;

b) $a\boldsymbol{S}b = 0$;

c) a et b ont un support disjoint dans $\boldsymbol{J} = \bigoplus \boldsymbol{J}_i$.

27. Montrer que si a, b, c et d sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec b et d symétriques semi-définies positives alors :

$$[\mathrm{tr}(abcd)]^2 = \mathrm{tr}(abad)\mathrm{tr}(bcbd).$$

Théorème 6 : Soient $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ la fermeture de Jordan de $\boldsymbol{S}$. Si I appartient à $\boldsymbol{S}$ alors pour tous éléments a et b de $\boldsymbol{J}$, l'équivalence suivante est vraie :

$$a\boldsymbol{S}b = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})b = 0.$$

27. Montrer, à l'aide de l'inégalité précédente, que l'implication suivante est vraie :

$$a\boldsymbol{S}b = 0 \quad \text{implique} \quad as^2b = 0.$$

En s'intéressant à la construction de $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$ à partir de $\boldsymbol{S}$, il est possible de de montrer que le résultat précédent suffit pour affirmer que :

$$a\boldsymbol{S}b = 0 \quad \text{implique} \quad a\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})b = 0.$$

28. Achever la démonstration du Théorème 6.

Une combinaison des résultats précédents aboutit aux Théorèmes 7 et 8 suivants.
Théorème 7 : Soient $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $I \in \boldsymbol{S}$ et a et b des éléments de $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $sasbs = 0, \forall s \in \boldsymbol{J}$;

b) $a\boldsymbol{S}b = 0$;

c) $a\boldsymbol{J}b = 0$;

d) a et b ont un support disjoint dans $\boldsymbol{B}$.

Théorème 8 : Soient $\boldsymbol{S} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) = \oplus \boldsymbol{J_i}$ pour des idéaux $\boldsymbol{J_i} \subseteq \boldsymbol{J}$, alors :

$$sasas = sas \quad \text{pour tout } s \in \boldsymbol{S}$$

si et seulement si

$$sa_isa_is = sa_is \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } s \text{ de } \boldsymbol{S_i} \text{ avec } a = \sum a_i,\ a_i \in \boldsymbol{J_i}.$$

29. Démontrer les Théorèmes 7 et 8.

Partie 7. Étude statistique des formes quadratiques aléatoires
Dans cette propriété, nous utilisons les résultats précédents pour s'intéresser aux propriétés d'indépendance et à la distribution de formes quadratiques de vecteurs aléatoires gaussiens. Commençons par rappeler deux résultats classiques sur les formes quadratiques aléatoires. Soit Y un vecteur aléatoire gaussien à valeur dans un espace vectoriel réel de dimension m, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, V)$, d'espérance μ et de matrice

de variance-covariance V semi-définie positive.

Théorème 9 (Rao et Mitra 1971) : Soit a, b deux matrices symétriques réelles d'ordre m, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, V)$. Les formes quadratiques aléatoires ${}^tYaY$ et ${}^tYbY$ sont statistiquement indépendantes si et seulement si :

$$VaVbV = 0, \quad VaVb\mu = VbVa\mu, \quad {}^t\mu aVb\mu = 0.$$

Théorème 10 (Rao et Mitra 1971) : Soit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, V)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique aléatoire ${}^tYaY$ soit distribuée suivant une loi du χ^2 à $k = \mathrm{tr}(aV)$ degrés de liberté est :

$$VaVaV = VaV.$$

L'extension des Théorèmes 9 et 10, qui va être étudiée dans la suite, consiste à s'intéresser aux propriétés d'indépendance ou à la loi de formes quadratiques aléatoires non plus en particulier par rapport à une matrice de variance-covariance connue semi-définie positive mais à une famille de matrices semi-définies positives $\boldsymbol{V}$. Cette situation se rencontre extrêmement souvent en statistique et en particulier lors de l'utilisation des modèles linéaires mixtes pour modéliser des données longitudinales qui servent à décrire par exemple l'évolution au cours du temps des caractéristiques de patients.

À la famille $\boldsymbol{V}$ de matrices semi-définies positives étudiée, nous associons $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{V})$ l'espace vectoriel engendré par cette famille. Tous les éléments de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{V})$ ne sont bien sûr pas des éléments $\boldsymbol{V}$ mais nous allons montrer dans la suite que si les propriétés d'indépendance ou de la loi des formes quadratiques aléatoires étudiées sont vérifiées sont une partie convexe de $\boldsymbol{S}$, elles le sont sur $\boldsymbol{S}$ en entier. Remarquons que l'enveloppe convexe de matrices (semi)définies positives est formée de matrices (semi)définies positives alors qu'il n'en va pas de même pour le sous-espace vectoriel engendré par une famille de matrices (semi)définies positives. D'un point de vue statistique, il est également souvent raisonnable de considérer des famille $\boldsymbol{V}$ de matrices de variance-covariance convexes.

Théorème 11 : Soit $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{V}))) = \oplus(\boldsymbol{B_i})$ une décomposition de $\boldsymbol{B}$ en idéaux de Jordan simples. Cette décomposition est une décomposition maximale de $\boldsymbol{S}$ vis à vis de la propriété d'indépendance statistique.

(i) Soient $b_{i,1}, b_{i,2} \in \boldsymbol{B_i} \setminus \{0\}$, ${}^tYb_{i,1}Y$ et ${}^tYb_{i,2}Y$ ne peuvent être statistiquement indépendants pour tout $V \in \boldsymbol{S}$.

(ii) Soient $b_i \in \boldsymbol{B_i} \setminus \{0\}$, $b_j \in \boldsymbol{B_j} \setminus \{0\}$, $i \neq j$, ${}^tYb_{i,1}Y$ et ${}^tYb_{i,2}Y$ sont statistiquement indépendants pour tout $V \in \boldsymbol{S}$.

30. Démontrer le Théorème 11.

Théorème 12 : Soit $a, b \in \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$. Les formes quadratiques aléatoires ${}^tYaY$ et ${}^tYbY$ sont statistiquement indépendantes si et seulement si a et b ont un support disjoint dans :

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}) = \oplus\boldsymbol{J_i}.$$

31. En considérant la décomposition de $\boldsymbol{S} = \oplus\boldsymbol{S_i}$ induite par celle de $\boldsymbol{J}$, démontrer le Théorème 12.

Il est souvent plus pratique d'utiliser la caractérisation suivante.
Proposition : Les formes quadratiques ${}^tYaY$ et ${}^tYbY$ sont statistiquement indépendantes pour tout élément V de $\boldsymbol{V}$, l'ensemble des matrices de variance-covariance considérées, si et seulement si $am_ib = 0$ pour tout m_i lorsque les m_i forment une base du sous-espace vectoriel engendré par $\boldsymbol{V}$.

32. Montrer la proposition ci-dessus.

Proposition : Soit $\boldsymbol{S}$ un sous-espace de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ et a, b des éléments de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$. Alors l'équivalence suivante est vérifiée :

$$a\boldsymbol{S}b = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (aa^+)\boldsymbol{S}(bb^+) = 0.$$

33. Montrer la proposition ci-dessus.

Théorème 13 : Soit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, V)$ et $a \in \boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{V}))$. La forme quadratique aléatoire ${}^tYaY$ suit une loi du χ^2 à $\mathrm{tr}(aV)$ degrés de liberté si et seulement si chaque membre de la décomposition de ${}^tYaY$ induite par celle de a dans $\boldsymbol{J}$ suit une loi du χ^2, c'est-à-dire si et seulement si tous les termes ${}^tYa_iY$, avec $a = \sum a_i$, $a_i \in \boldsymbol{J_i}$ suivent une loi du χ^2. Les degrés de liberté associés à chacune de ces lois du χ^2 sont $\mathrm{tr}(a_iV_i)$. En égalant les degrés de liberté il vient que $\mathrm{tr}(aV) = \sum \mathrm{tr}(a_iV_i)$.

34. En considérant la décomposition de $\boldsymbol{S} = \oplus \boldsymbol{S_i}$ induite par celle de $\boldsymbol{J}$, démontrer le Théorème 12.

Partie 8. Utilisation de la convexité

Lemme : Soit a et b de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ tels que

$$cacbc = 0, \quad \forall c \in \boldsymbol{C},$$

où $\boldsymbol{C}$ est une partie convexe de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ qui contient une unité, c'est-à-dire un élément e tel que $ec = ce = c$ pour tout $c \in \boldsymbol{C}$.
L'égalité

$$sasbs = 0$$

est vraie pour tout $s \in \boldsymbol{S}$, où $\boldsymbol{S}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\boldsymbol{C}$.

34. Montrer le lemme précédent.

Théorème 14 : Soient $Y \sim \mathcal{N}(\mu, V)$, $\boldsymbol{C}$ l'ensemble des matrice de variance-covariance V considéré et $\boldsymbol{S}$ le sous-espace vectoriel qu'il engendre. L'ensemble $\{m_i\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ désigne une base de $\boldsymbol{S}$ et a, b des éléments de $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S})$. Les formes quadratiques aléatoires ${}^tYaY$ et ${}^tYbY$ sont statistiquement indépendantes si et seulement si $am_ib = 0$ pour tout i.

34. Démontrer le Théorème 14.