

T. D. n° 3

Exercices sur les vecteurs gaussiens et les lois conditionnelles

Exercice 1. Densité d'un vecteur gaussien.

Soit X un vecteur gaussien de matrice de covariance C et d'espérance μ . Nous supposons que $C = ADA^t$ où D est diagonale et A orthogonale. Nous considérons le vecteur aléatoire $Y = A^t(X - \mu)$.

1. Montrer que Y est un vecteur gaussien.
2. Déterminer l'espérance μ_Y de Y .
3. Déterminer la matrice de covariance C^Y de Y . En déduire que les Y_k sont indépendants.
4. Nous supposons de plus que C est définie positive. Nous avons alors D inversible.
 - a. Quelle est la loi de Y_k ? En déduire que Y a une densité que vous explicitez.
 - b. Montrer que X a une densité que vous déterminerez.

Exercice 2. Vecteur non gaussien à marginales gaussiennes.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et T indépendante de X telle que :

$$\mathbb{P}[T = 1] = \mathbb{P}[T = -1] = \frac{1}{2}.$$

Montrer que $Y = TX$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que le vecteur aléatoire (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 3. Un exercice pour commencer avec des lois conditionnelles.

Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X|Y - X]$.
2. En déduire la loi de $\mathbb{E}[X|Y - X]$.

Exercice 4. Encore un exercice sur les lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ sur

\mathbb{R}^2 . Nous supposons que $\det \Gamma > 0$.

1. Justifier le fait que le vecteur (X, Y) admette une densité f . Déterminer f .
2. En déduire que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est donnée par une densité $f^{X|Y=y}$ que nous expliciterons.
3. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$?