T. D. n° 4
Exercices sur des résultats divers

Exercice 1. Propriétés sur la moyenne et la variance d'un échantillon

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d d'espérance μ et d'écart-type σ. Notons

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

1. Moyenne empirique.
   a. Calculer l'espérance de $\overline{X}$.
   b. Calculer la variance de $\overline{X}$.
2. Variance empirique.
   a. Calculer l'espérance de S^{*2}.
   b. Calculer la variance de S^{*2}.
3. Dans cette question, nous supposons que les variables aléatoires suivent une loi normale. Répondre aux questions 1.a., 1.b, 2.a, 2.b dans ce cas précis. Qu'observez-vous ?

Exercice 2. Le théorème de Fisher

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. Nous posons alors les variables aléatoires

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$
$$\text{et} \quad \Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2.$$

1. Quelle est la loi de $\overline{X}$?
2. Quelle est la loi de $n\Sigma^2/\sigma^2$?
3. Montrer que $\overline{X}$ et S^{*2} sont indépendantes.
4. Montrer que $(n-1)S^{*2}/\sigma^2$ suit une loi $\chi^2(n-1)$.

Exercice 3. Une réciproque au théorème de Fisher

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de carré intégrable, d'espérance m, de variance σ^2. On suppose que la moyenne empirique $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et la variance empirique $V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ sont des variables indépendantes. Le but de cet exercice est de démontrer que la loi de X_i est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Notons ψ la fonction caractéristique de X_i et supposons $m = O$.

1. Calculer $\mathbb{E}[(n-1)V_n]$ en fonction de σ^2. Montrer que pour tout réel t,
$$\mathbb{E}[(n-1)V_n e^{itn\overline{X_n}}] = (n-1)\psi(t)^n\sigma^2.$$
2. En développant V_n dans l'égalité précédente, vérifier que
$$\mathbb{E}[(n-1)V_n e^{itn\overline{X_n}}] = -(n-1)\psi''(t)\psi(t)^{n-1} - (n-1)\psi'(t)^2\psi(t)^{n-2}.$$
3. En déduire que ψ est solution de l'équation différentielle
$$\begin{cases} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{\psi^2} = -\sigma^2, \\ \psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = 0. \end{cases}$$
4. En déduire que la loi des variables X_i est la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
5. Que faire si nous ne supposons plus que $m = 0$.

Exercice 4. Un résultat du cours

Démontrer la proposition suivante.
Proposition : Soient une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée-réduite et X une variable suivant indépendamment de U une loi χ^2_n. Alors la variable aléatoire
$$T_n = \frac{U}{\sqrt{X/n}}.$$
suit la loi de Student à n degrés de liberté.
De plus, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, alors la variable aléatoire
$$\frac{\overline{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}}$$
suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté, où
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$