# T. D. n° 3
# Exercices sur les vecteurs gaussiens et les lois conditionnelles

**Exercice 1. Densité d'un vecteur gaussien.**

Soit $X$ un vecteur gaussien de matrice de covariance $C$ et d'espérance $\mu$. Nous supposons que $C = ADA^t$ où $D$ est diagonale et $A$ orthogonale. Nops considérons le vecteur aléatoire $Y = A^t(X - \mu)$.

1. Montrer que $Y$ est un vecteur gaussien.
2. Déterminer l'espérance $\mu_Y$ de $Y$.
3. Déterminer la matrice de covariance $C^Y$ de $Y$. En déduire que les $Y_k$ sont indépendants.
4. Nous supposons de plus que $C$ est définie positive. Nous avons alors $D$ inversible.
   a. Quelle est la loi de $Y_k$ ? En déduire que $Y$ a une densité que vous expliciterez.
   b. Montrer que $X$ a une densité que vous déterminerez.

**Exercice 2. Vecteur non gaussien à marginales gaussiennes.**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $T$ indépendante de $X$ telle que :

$$\mathbb{P}[T = 1] = \mathbb{P}[T = -1] = \frac{1}{2}.$$

Montrer que $Y = TX$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et que le vecteur aléatoire $(X, Y)$ n'est pas gaussien.

**Exercice 3. Un exercice pour commencer avec des lois conditionnelles.**

Soit $(X, Y)$ un couple gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X|Y - X]$.
2. En déduire la loi de $\mathbb{E}[X|Y - X]$.

**Exercice 4. Encore un exercice sur les lois conditionnelles**

Soit $(X, Y)$ un couple gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^2$. Nous supposons que $\det \Gamma > 0$.

1. Justifier le fait que le vecteur $(X, Y)$ admette une densité $f$. Déterminer $f$.
2. En déduire que la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y = y$ est donnée par une densité $f^{X|Y=y}$ que nous expliciterons.
3. Quelle est la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y = y$ ?