



### Exemple - Suite

Ainsi le second facteur  $B_j$ , associé au  $j$ -ème magasin dans la chaîne, est un repère qui n'a aucune signification réelle : il n'y a, par exemple aucune relation entre le magasin n°3 de la chaîne 1 et le magasin n°3 de la chaîne 4. Il n'y a donc aucun intérêt à introduire un terme dans le modèle caractérisant l'effet principal du facteur  $B$ .

Pour indiquer la dépendance des niveaux du second facteur  $B$  aux niveaux du premier facteur  $A$  nous notons les niveaux du second facteur  $B : B_{j(i)}, 1 \leq i \leq I$  et  $1 \leq j \leq J$ .

### Exemple (Damon et Harvey, 1987)

L'expérience consiste à évaluer le gain de masse, en grammes, entre la dixième et la vingtième semaine de poulets soumis à quatre régimes alimentaires obtenus en combinant des niveaux faibles ou élevés de Calcium et de Lysine. Deux enclos de six poulets ont été utilisés pour chacun des quatre traitements étudiés.

### Remarque

Les deux facteurs, Régime et Enclos, sont contrôlés par l'expérimentateur.

### Tableau des données

	Régime			
	LoCaLoL	LoCaHiL	HiCaLoL	HiCaHiL
Enclos	1	2	1	2
Gain de masse (en g)	573	1041	618	943
	636	814	926	640
	883	498	717	373
	550	890	677	907
	613	636	659	734
	901	685	817	1050
			731	416
			845	729
			866	590
			729	552
			770	776
			787	657
			518	416
			782	729
			938	590
			755	552
			672	776
			576	657

### Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \mathcal{E}_{ijk}$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$ , avec les deux contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^J \beta_{j(i)} = 0, \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, I\}$$

où  $Y_{ijk}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(\alpha_i, \beta_{j(i)})$  lors du  $k$ -ème essai. Nous notons  $n = I \times J \times K$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.



### Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs emboîtés à effets fixes avec répétitions permet deux tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_J = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \dots, J\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\alpha, obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

### Premier test - Suite

Nous concluons alors à l'aide de la  $p$ -valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil  $\alpha$  du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur  $F_{\alpha, obs}$  est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table de Fisher.

Lorsque l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) est rejetée, nous pouvons procéder à des tests de comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur.

### Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \dots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \dots = \beta_{J(I)} = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet des facteurs  $\beta$  dans le facteur  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\beta|_{\alpha, obs}}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I(J - 1)$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.



### Exemple (Box et al., 1978)

Box et al. ont récolté les données d'une expérience conçue pour estimer la moisissure contenue dans une pâte de piment produite par une entreprise agro-alimentaire. Pour ce faire, 15 lots de pots de pâte de piment ont été sélectionnés au hasard dans la production de l'entreprise et dans chacun de ces lots, deux pots de pâte ont été à nouveau sélectionnés au hasard. Deux prélèvements distincts de pâte ont été analysés pour chacun de ces pots.

### Remarque

Les deux facteurs, Lot et Échantillon, sont tous deux considérés comme des facteurs à effets aléatoires.

### Tableau des données

Lot	1	2	3	4	5
Échan.	1	2	1	2	1
Analyses	40	30	26	25	29
	30	30	28	26	28
Lot	6	7	8	9	10
Échan.	1	2	1	2	1
Analyses	33	26	23	32	34
	32	24	24	33	34
Lot	11	12	13	14	15
Échan.	1	2	1	2	1
Analyses	25	25	29	31	19
	23	27	29	32	20

### Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

avec  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$   
et où  $Y_{ijk}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(A_i, B_{j(i)})$  lors du  $k$ -ème essai.  
Nous notons  $n = I \times J \times K$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.

### Contexte

- Les termes  $A_i$  représentent un échantillon de taille  $I$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $A_j$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_A^2$ .
- Les termes  $B_{j(i)}$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante dépendant du niveau  $A_i$  du facteur  $A$ . Nous admettrons que les effets des  $B_{j(i)}$ , sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_{B|A}^2$ .
- Pour chacun des couples de modalités  $(A_i, B_{j(i)})$  nous effectuons  $K \geq 2$  mesures d'une réponse  $Y$  qui est une variable continue.



### Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\mathcal{L}(A_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq I,$$

$$\mathcal{L}(B_{j(i)}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{B|A}^2), \text{ pour tout } j, 1 \leq j \leq J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires  $A_i$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_{j(i)}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $A_i$  et  $B_{j(i)}$  sont indépendants.

### Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

### Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $A_i$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_{j(i)}$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants.

### Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_A$ ,  $SC_{B|A}$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_{B|A} + SC_R.$$

### Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	$s^2$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au facteur A	$SC_A$	$I - 1$	$s_A^2$	$\frac{s_A^2}{s_R^2}$	C
Due au facteur B dans A	$SC_{B A}$	$I(J - 1)$	$s_B^2$	$\frac{s_{B A}^2}{s_R^2}$	C
Résiduelle	$SC_R$	$IJ(K - 1)$	$s_R^2$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

### Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs emboîtés à effets aléatoires avec répétitions permet deux tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_A^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_A^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $A$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{A,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $I(J - 1)$  degrés de liberté.

### Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_{B|A}^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  dans le facteur  $A$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B|A,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I(J - 1)$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

### Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Analyse de la variance pour Analyse, avec utilisation de la somme des carrés ajustée pour les tests

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
Lot	14	1210,933	86,495	1,49	0,226
Echan.					
(Lot)	15	869,750	57,983	63,25	0,000
Erreur	30	27,500	0,917		
Total	59	2108,183			

S = 957427 R carré = 98,70% R carré (ajust) = 97,43 %



### Remarque

Nous supposons que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.

### Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test,  $P\text{-value} = 0,226$ , nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur à effets aléatoires « Lot ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
- 2 Pour le deuxième test,  $P\text{-value} = 0,000$ , nous décidons, au seuil  $\alpha = 5\%$ , de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire qu'il y a un effet significatif du facteur à effets aléatoires « Échantillon » dans le facteur à effets aléatoires « Lot ». Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui vaut 5%.

### Exemple (Snedecor et Cochran, 1989)

L'expérience porte sur la prise de poids quotidienne de jeunes cochons au cours de leur phase de croissance. L'objectif de l'expérience est de déterminer l'influence du patrimoine génétique de cinq pères sur leurs descendants. Pour ce faire, ces cinq mâles ont eu une portée avec deux mères différentes et choisies au hasard. Dans chacune de ces portées, deux animaux ont été sélectionnés et leur masse mesurée en grammes.

### Remarque

Le facteur Père est considéré comme un facteur à effets fixes et le facteur Mère comme un facteur à effets aléatoires.

### Tableau des données

Père	1	2	3
Mère	1	2	1
Gain	2,77	2,58	2,28
masse	2,38	2,94	2,22
Père	4	5	
Mère	1	2	
Gain	2,87	2,31	
masse	2,46	2,24	

## Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_{j(i)} + \mathcal{E}_{i,j,k}$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$ ,  
avec les contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0,$$

où  $Y_{ijk}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(\alpha_i, B_{j(i)})$  lors du  $k$ -ème essai.  
Nous notons  $n = I \times J \times K$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.



## Contexte

- 1 Un facteur contrôlé  $\alpha$  se présente sous  $I$  modalités, chacune d'entre elles étant notée  $\alpha_i$ .
- 2 Les termes  $B_{j(i)}$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $B_{j(i)}$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_B^2$ .
- 3 Pour chacun des couples de modalités  $(\alpha_i, B_{j(i)})$  nous effectuons  $K \geq 2$  mesures d'une réponse  $Y$  qui est une variable continue.



## Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

- $\mathcal{L}(B_j(i)) = \mathcal{N}(0, \sigma_{B|\alpha}^2)$ , pour tout  $j, 1 \leq j \leq J$ ,
- les effets aléatoires  $B_{j(i)}$  sont indépendants.



## Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

## Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $B_{j(i)}$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants.



### Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_\alpha$ ,  $SC_{B|\alpha}$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_\alpha + SC_{B|\alpha} + SC_R.$$

### Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	$s^2$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au facteur $\alpha$	$SC_\alpha$	$I - 1$	$s_\alpha^2$	$\frac{s_\alpha^2}{s_{B \alpha}^2}$	$C$
Due au facteur $B$ dans $\alpha$	$SC_{B \alpha}$	$I(J - 1)$	$s_B^2$	$\frac{s_{B \alpha}^2}{s_R^2}$	$C$
Résiduelle	$SC_R$	$IJ(K - 1)$	$s_R^2$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

### Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à 2 facteurs emboîtés à effets mixtes avec répétitions permet deux tests de Fisher.

### Premier test

Nous souhaitons tester l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_J = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \dots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\alpha, obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $I(J - 1)$  degrés de liberté.

### Décision

Nous concluons alors à l'aide de la  $p$ -valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil  $\alpha$  du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur  $F_{\alpha, obs}$  est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

### Comparaisons multiples

Lorsque l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur. Nous renvoyons au chapitre 1 qui traite des principales méthodes de comparaisons multiples.

### Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_{B|\alpha}^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_{B|\alpha}^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  dans  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B|\alpha}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I(J - 1)$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

### Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Analyse de la variance pour Analyse, avec utilisation de la somme des carrés ajustée pour les tests

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
Père	4	0,09973	0,02493	0,22	0,916
Mère					
(Père)	5	0,56355	0,11271	2,91	0,071
Erreur	10	0,38700	0,03870		
Total	19	1,05028			

$S = 0,196723$  R carré = 63,15% R carré (ajust) = 29,99 %

### Remarque

Nous supposons que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.

## Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test,  $P\text{-value} = 0,916$ , nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur à effets fixes « Père ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
- 2 Pour le deuxième test,  $P\text{-value} = 0,071$ , nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur à effets aléatoires « Mère » dans le facteur à effets fixes « Père ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.