

# Modèles aléatoires et mixtes de l'analyse de la variance à deux facteurs

Frédéric Bertrand<sup>1</sup> & Myriam Maumy<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IRMA, Université de Strasbourg  
Strasbourg, France

Master 1<sup>re</sup> Année  
2012-2013

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 Modèle à effets aléatoires
  - Avec répétitions
  - Sans répétition
- 3 Modèle à effets mixtes
  - Avec répétitions
  - Sans répétition

## Références

Ce cours s'appuie essentiellement sur

- 1 le livre David C. Howell, **Méthodes statistiques en sciences humaines** traduit de la sixième édition américaine aux éditions de Boeck, 2008.
- 2 le livre de Pierre Dagnelie, **Statistique théorique et appliquée**, Tome 2, aux éditions de Boeck, 1998.
- 3 le livre de Hardeo Sahai et Mohammed I. Ageel, **The Analysis of Variance : Fixed, Random and Mixed Models**, aux éditions Birkhäuser, 2000.

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 Modèle à effets aléatoires
  - Avec répétitions
  - Sans répétition
- 3 Modèle à effets mixtes
  - Avec répétitions
  - Sans répétition

## Quatre nouveaux modèles

Comme nous l'avons vu dans le chapitre « Compléments sur l'analyse de la variance à un facteur », il se peut que les effets d'un facteur ne puissent être modélisés par des effets fixes. Par conséquent, nous pouvons être confrontés à quatre autres types de modèles :

- 1 Un modèle avec deux facteurs à effets aléatoires, avec ou sans répétitions.  
Ces deux modèles sont appelés modèles à effets aléatoires.
- 2 Un modèle avec un facteur à effets aléatoires et un facteur à effets fixes, avec ou sans répétitions.  
Ces deux modèles sont appelés modèles à effets mixtes.

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 **Modèle à effets aléatoires**
  - **Avec répétitions**
  - Sans répétition
- 3 **Modèle à effets mixtes**
  - Avec répétitions
  - Sans répétition

## Exemple issu du livre de Dagnelie

Les responsables d'un laboratoire d'analyse chimique par spectrométrie dans le proche infrarouge se sont intéressés à la variabilité des résultats qu'ils obtenaient pour les mesures des teneurs en protéines du blé.

En particulier, ils se sont interrogés sur l'importance des différences qui pouvaient découler des étapes successives de préparation des matières à analyser.

Nous considérons ici le problème du broyage, en examinant les résultats obtenus à l'aide de trois moulins.

## Suite de la mise en situation

Cinq échantillons de grains de blé ont été prélevés au hasard dans un arrivage relativement important, et divisés chacun en six sous-échantillons.

Pour chacun des échantillons, les sous-échantillons ont ensuite été affectés au hasard à trois moulins qui eux-mêmes ont été choisis au hasard dans une production de moulins.

Pour terminer, une analyse chimique a été effectuée dans chaque cas. Le tableau ci-dessous présente les résultats, à savoir les mesures des teneurs en protéines, exprimées en pourcentage de la matière sèche.

## Tableau des données

Moulin/Échantillon	1	2	3	4	5
1	13,33	13,62	13,53	13,60	13,97
	13,43	13,33	13,75	13,44	13,32
2	13,04	13,26	13,49	13,05	13,28
	13,34	13,49	13,59	13,44	13,67
3	13,24	13,33	13,07	13,47	13,46
	13,25	13,46	13,33	13,04	13,32

## Remarque

Le modèle d'analyse de la variance qui peut être envisagé pour analyser ces données est un modèle à deux facteurs aléatoires avec répétitions.

## Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K,$

où  $Y_{ijk}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(A_i, B_j)$  lors du  $k$ -ème essai.

Notons  $n = I \times J \times K$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.

## Contexte

- Les termes  $A_i$  représentent un échantillon de taille  $I$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $A_i$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_A^2$ .
- Les termes  $B_j$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $B_j$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_B^2$ .
- Pour chacun des couples de modalités  $(A_i, B_j)$  nous effectuons  $K \geq 2$  mesures d'une réponse  $Y$  qui est une variable continue.

## Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\mathcal{L}(A_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), \text{ pour tout } i, \quad 1 \leq i \leq I,$$

$$\mathcal{L}(B_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \text{ pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$\mathcal{L}((AB)_{ij}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2), \text{ pour tout } (i, j), \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq j \leq J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires  $A_i$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $(AB)_{ij}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $A_i$  et  $B_j$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $A_i$  et  $(AB)_{ij}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  et  $(AB)_{ij}$  sont indépendants.

## Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

## Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $A_i$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $(AB)_{ij}$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants.

## Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_A$ ,  $SC_B$ ,  $SC_{AB}$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R.$$

## Tableau de l'ANOVA

Variation	$SC$	$ddl$	$CM$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au fact. $A$	$SC_A$	$I - 1$	$cm_A$	$\frac{cm_A}{cm_{AB}}$	$C_A$
Due au fact. $B$	$SC_B$	$J - 1$	$cm_B$	$\frac{cm_B}{cm_{AB}}$	$C_B$
Interaction	$SC_{AB}$	$(I - 1)(J - 1)$	$cm_{AB}$	$\frac{cm_{AB}}{cm_R}$	$C_{AB}$
Résiduelle	$SC_R$	$IJ(K - 1)$	$cm_R$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

## Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires avec répétitions permet trois tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_A^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_A^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $A$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{A,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $J - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Troisième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_{AB}^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_{AB}^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs  $A$  et  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{AB,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $(I - 1)(J - 1)$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

## Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Analyse de la variance pour Teneurs en protéines, avec utilisation de la somme des carrés ajustée pour les tests

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
Mou	2	0,29246	0,14623	8,70	0,010
Ech	4	0,20731	0,05183	3,08	0,082
Mou*Ech	8	0,13451	0,01681	0,38	0,917
Erreur	15	0,66840	0,04456		
Total	29	1,30268			

S = 0,211092 R carré = 48,69% R carré (ajust)  
= 0,80 %

## Remarque

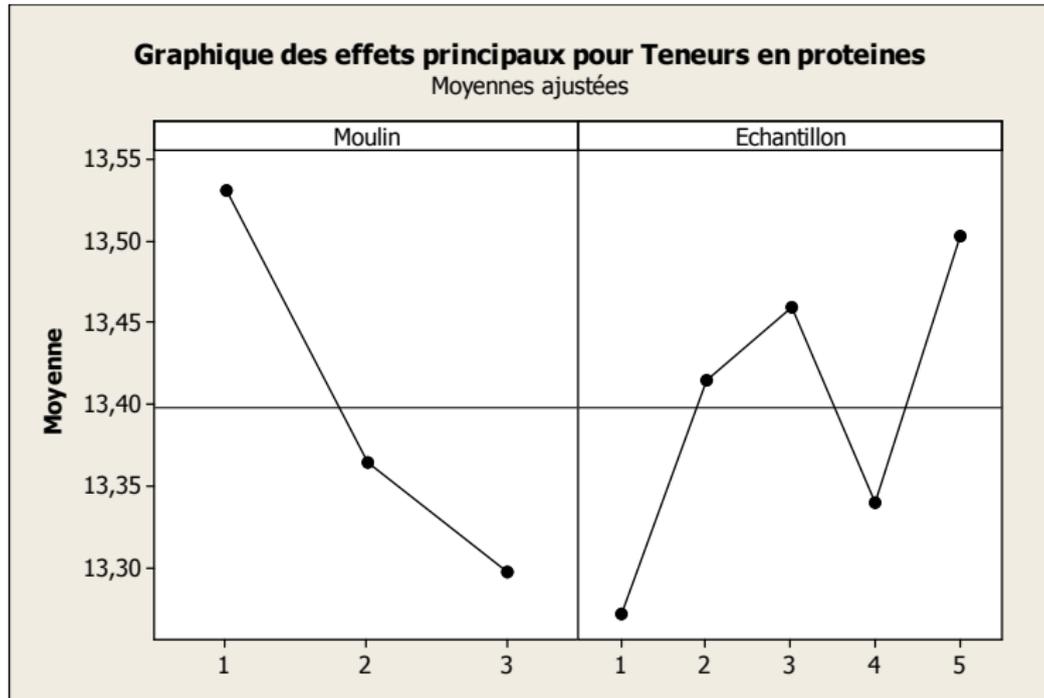
Nous supposons que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.

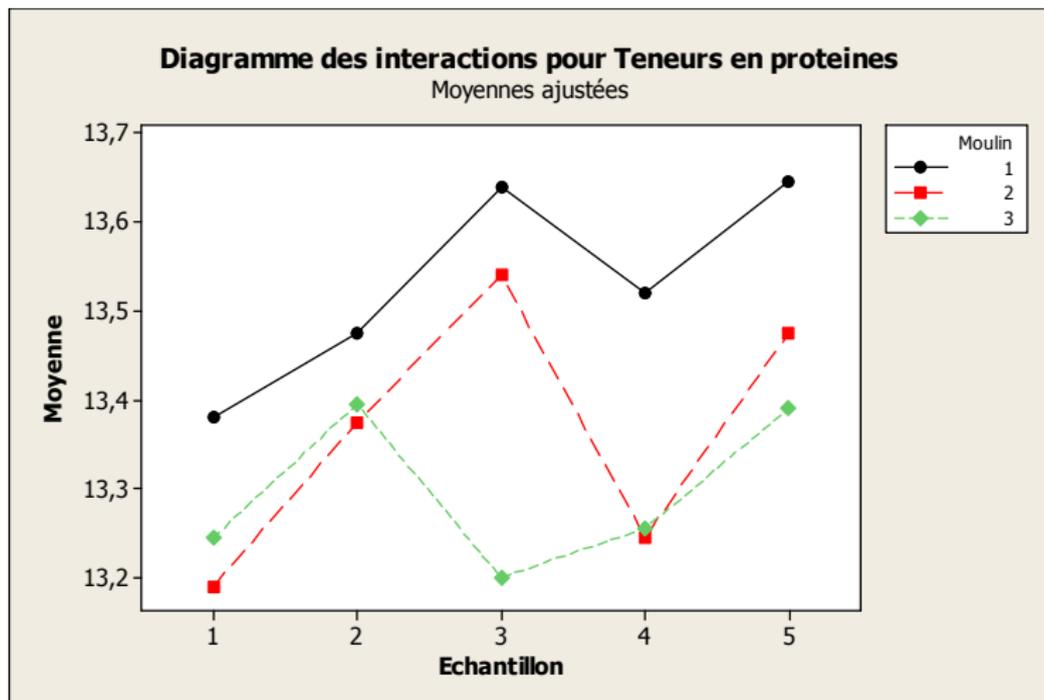
## Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test, P-value = 0,010, nous décidons, au seuil  $\alpha = 5\%$ , de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Moulin ».  
Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui vaut 5%.

## Analyse des résultats - Suite et fin

- 2 Pour le deuxième test,  $P\text{-value} = 0,082$ , nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Échantillon ».  
Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
- 3 Pour le troisième test,  $P\text{-value} = 0,917$ , nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Interaction ».  
Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.





# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 **Modèle à effets aléatoires**
  - Avec répétitions
  - **Sans répétition**
- 3 **Modèle à effets mixtes**
  - Avec répétitions
  - Sans répétition

## Exemple adapté du Diplôme Universitaire de Statistique

Nous étudions la dissolution du principe actif contenu dans un type donné de comprimé issu de lots de production distincts. Pour cela, six lots ont été sélectionnés au hasard parmi toute la production et la dissolution de quatre comprimés pris au hasard dans chacun des lots est observée. Après 15, 30, 45 et 60 minutes, un comprimé de chaque lot est sélectionné et le pourcentage de principe actif dissous, par rapport à la valeur titre, est déterminé. Ces valeurs sont données dans le tableau qui va suivre. Il est à noter que les temps d'observation à savoir, 15, 30, 45 et 60 minutes sont des temps qui ont été choisis aléatoirement par l'expérimentateur qui n'avait pas de connaissance a priori sur ces 24 comprimés.

## Tableau des données

Lot/Temps	15 min	30 min	45 min	60 min
Lot 1	66	87	93	90
Lot 2	60	91	99	98
Lot 3	69	91	93	92
Lot 4	61	97	97	101
Lot 5	61	84	106	103
Lot 6	57	88	94	99

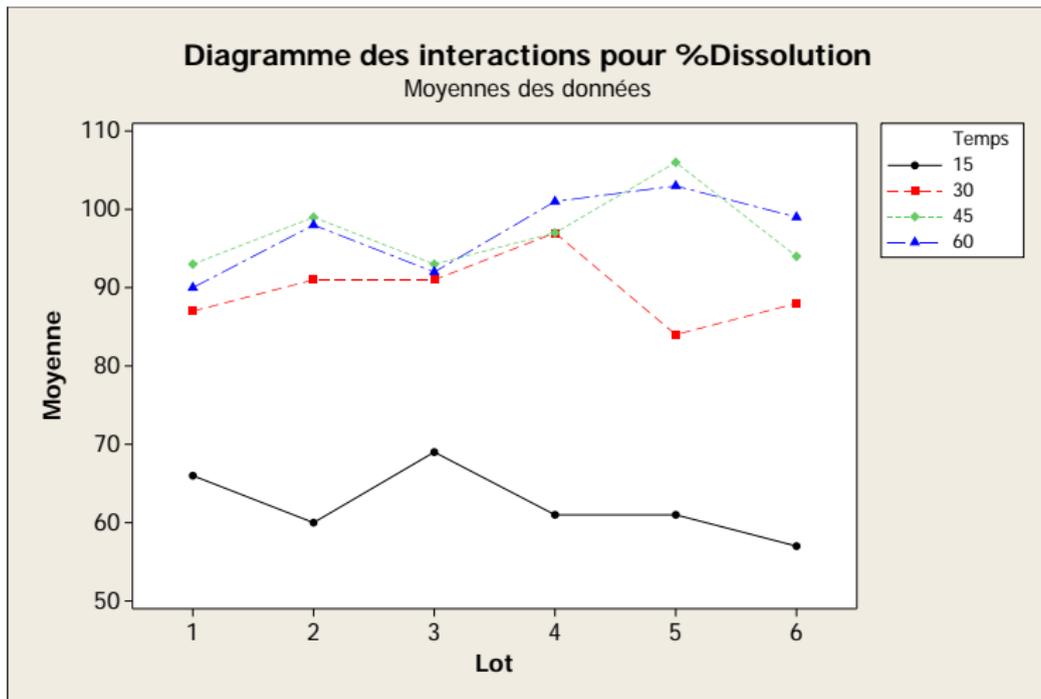
## Question que se pose l'expérimentateur

À partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ?

## Hypothèse d'absence d'existence des interactions

Pour utiliser un modèle sans répétition, il est **nécessaire** de supposer que les interactions entre les deux facteurs n'existent pas ou sont négligeables.

Une possibilité pour évaluer cette hypothèse est de construire le diagramme des interactions et de prendre une décision à l'aide des profils représentés.



## Modèle statistique

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ij} = \mu + A_i + B_j + \varepsilon_{ij},$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J,$

où  $Y_{ij}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(A_i, B_j)$ .

Notons  $n = I \times J$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.

## Contexte

- Les termes  $A_i$  représentent un échantillon de taille  $I$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $A_i$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_A^2$ .
- Les termes  $B_j$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $B_j$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_B^2$ .

## Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A_i) &= \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), \text{ pour tout } i, \quad 1 \leq i \leq I, \\ \mathcal{L}(B_j) &= \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \text{ pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq J,\end{aligned}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires  $A_i$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $A_i$  et  $B_j$  sont indépendants.

## Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ij}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

## Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $A_i$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ij}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ij}$  sont indépendants.

## Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_A$ ,  $SC_B$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R.$$

## Tableau de l'ANOVA

Variation	$SC$	$ddl$	$CM$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au facteur $A$	$SC_A$	$I - 1$	$cm_A$	$\frac{cm_A}{cm_R}$	$C_A$
Due au facteur $B$	$SC_B$	$J - 1$	$cm_B$	$\frac{cm_B}{cm_R}$	$C_B$
Résiduelle	$SC_R$	$(I - 1)(J - 1)$	$cm_R$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

## Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires sans répétition permet deux tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_A^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_A^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $A$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{A,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $J - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Analyse de la variance pour Principe actif dissous, avec utilisation de la somme des carrés ajustée pour les tests

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
Lot	5	83,21	16,64	0,68	0,647
Temps	3	4908,46	1636,15	66,6	0,000
Erreur	15	368,29	24,55		
Total	23	5359,96			

S = 4,95508 R carré = 93,13% R carré (ajust) = 89,46%

## Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test, P-value = 0,647, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Lot ».

Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.

- 2 Pour le deuxième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil  $\alpha = 5\%$ , qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Temps ».

## Analyse des résultats - Suite et fin

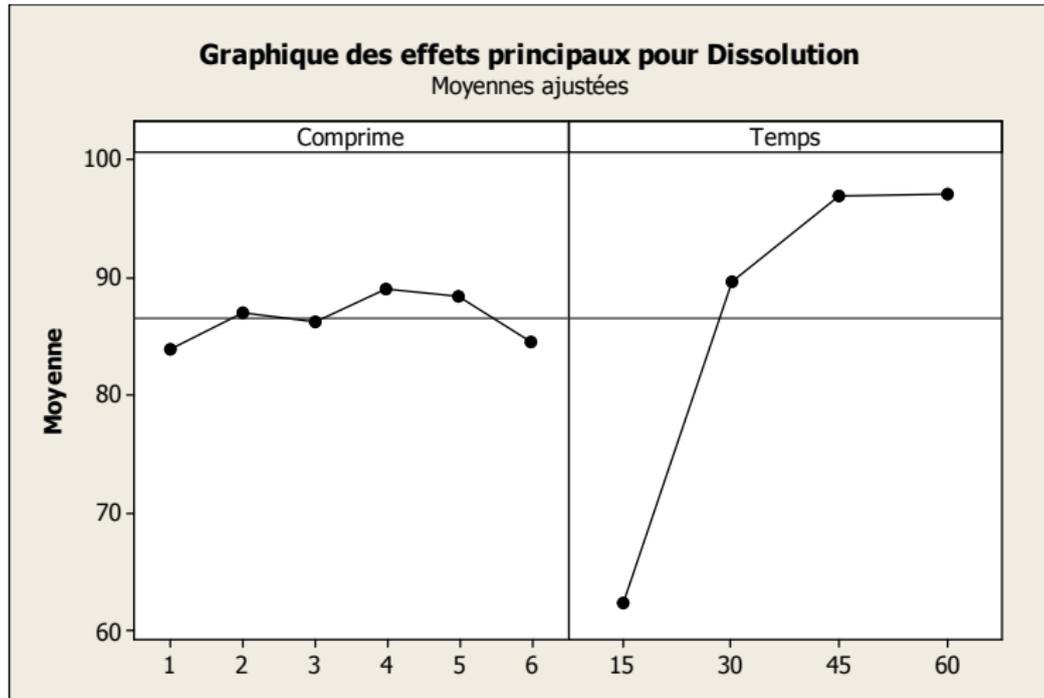
Nous ne sommes pas capables de répondre à la question de l'expérimentateur, à savoir :

« à partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ? »

puisque nous ne pouvons pas faire de tests de comparaisons multiples, étant donné que le facteur « Temps » est à effets aléatoires.

## Remarque

Bien sûr, nous pouvons faire cette analyse des résultats, si auparavant nous avons vérifié que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons ultérieurement.



# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 **Modèle à effets aléatoires**
  - Avec répétitions
  - Sans répétition
- 3 **Modèle à effets mixtes**
  - **Avec répétitions**
  - Sans répétition

## Exemple issu du livre de Howell

Eysenck (1974) a mené une étude consacrée à la rétention de matériel verbal en fonction du niveau de traitement. Elle faisait varier aussi bien l'âge que la condition de rétention.

Le modèle de la mémorisation proposé par Craik et Lockhart (1972) stipule que le degré auquel un sujet se rappelle un matériel verbal est fonction du degré auquel ce matériel a été traité lors de sa présentation initiale. Ainsi, si l'on essaie de mémoriser une liste de mots, répéter simplement un mot pour soi-même (un niveau de traitement très bas) ne permet pas de le mémoriser aussi bien que si l'on y réfléchit en tentant de former des associations entre ce mot et un autre.

## Exemple issu du livre de Howell (suite)

Eysenck (1974) voulait tester ce modèle et, plus important encore, examiner s'il pouvait contribuer à expliquer certaines différences relevées entre des sujets jeunes et âgés concernant leur aptitude à se rappeler du matériel verbal.

Eysenck a réparti aléatoirement 50 sujets âgés de 55 à 65 ans dans cinq groupes ; les quatre premiers impliquaient un apprentissage involontaire et le dernier un apprentissage intentionnel (l'apprentissage involontaire se caractérisait par le fait que le sujet ne savait pas qu'il devrait plus tard se rappeler le matériel appris).

## Exemple issu du livre de Howell (suite)

Le premier groupe (addition) devait lire une liste de mots et se contenter de compter le nombre de lettres de chacun d'eux. Il s'agissait du niveau de traitement le plus bas, puisqu'il n'était pas nécessaire chaque mot autrement que comme une suite de lettres.

Le deuxième groupe (rimes) devait lire chaque mot et lui trouver une rime. Cette tâche impliquait de considérer la consonance de chaque mot, mais pas sa signification.

Le troisième groupe (adjectifs) devait donner un adjectif qui aurait pu être utilisé pour modifier chaque mot de la liste.

## Exemple issu du livre de Howell (suite)

Le quatrième groupe (images) devait essayer de se former une image précise de chaque mot. Cette dernière tâche était supposée nécessiter le niveau de traitement le plus élevé parmi les quatre groupes d'apprentissage involontaire.

Aucun de ces groupes ne savait qu'il faudrait se rappeler les mots ultérieurement.

## Exemple issu du livre de Howell (suite)

Enfin, le groupe d'apprentissage intentionnel devait lire la liste et mémoriser tous les mots. Après avoir passé trois fois en revue la liste de 27 mots, les sujets devaient retranscrire tous les mots dont ils se souvenaient.

Si l'apprentissage n'impliquait rien de plus qu'une exposition au matériel (soit la façon dont la plupart d'entre nous lisent le journal ou, pis encore, un devoir), les cinq groupes devaient obtenir des résultats identiques ; après tout, ils avaient tous vu tous les mots. Si le niveau de traitement était important, on devait constater des différences sensibles entre les moyennes des groupes.

## Exemple issu du livre de Howell (suite)

L'étude incluait 50 participants dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans, ainsi que 50 participants compris dans la tranche d'âge 55-65 ans. Pour plus de facilité, nous avons regroupé les 50 participants dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans dans une classe que nous appellerons « sujets jeunes » et les 50 participants dont l'âge se situait entre 55 et 65 ans dans une classe que nous allons appeler « sujets âgés ».

Les données sont présentées dans le tableau suivant :

## Exemple : Sujets jeunes

Addition	Rimes	Adjectifs	Images	Intentionnel
8	10	14	20	21
6	7	11	16	19
4	8	18	16	17
6	10	14	15	15
7	4	13	18	22
6	7	22	16	16
5	10	17	20	22
7	6	16	22	22
9	7	12	14	18
7	7	11	19	21

## Exemple : Sujets âgés

Addition	Rimes	Adjectifs	Images	Intentionnel
9	7	11	12	10
8	9	13	11	19
6	6	8	16	14
8	6	6	11	5
10	6	14	9	10
4	11	11	23	11
6	6	13	12	14
5	3	13	10	15
7	8	10	19	11
7	7	11	11	11

## Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + (\alpha B)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K,$

avec les contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^I (\alpha B)_{ij} = 0, \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, J\}$$

où  $Y_{ijk}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(\alpha_i, B_j)$  lors du  $k$ -ème essai.

Notons  $n = I \times J \times K$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.

## Contexte

- 1 Un facteur contrôlé  $\alpha$  se présente sous  $I$  modalités, chacune d'entre elles étant notée  $\alpha_j$ .
- 2 Les  $B_j$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $B_j$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_B^2$ .
- 3 Pour chacun des couples de modalités  $(\alpha_j, B_j)$  nous effectuons  $K \geq 2$  mesures d'une réponse  $Y$  qui est une variable continue.

## Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\mathcal{L}(B_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \text{ pour tout } j, 1 \leq j \leq J,$$

$$\mathcal{L}((\alpha B)_{ij}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha B}^2), \text{ pour tout } (i, j), 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires  $B_j$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $B_j$  et  $(\alpha B)_{ij}$  sont indépendants.

## Remarque

Les effets aléatoires  $(\alpha B)_{ij}$  ne sont pas indépendants à cause de l'existence des contraintes portant sur les  $(\alpha B)_{ij}$ .

## Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

## Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $B_j$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants
- les effets aléatoires  $(\alpha B)_{ij}$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont indépendants.

## Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_{\alpha}$ ,  $SC_B$ ,  $SC_{\alpha B}$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_{\alpha} + SC_B + SC_{\alpha B} + SC_R.$$

## Tableau de l'ANOVA

Variation	$SC$	$ddl$	$CM$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au fact. $\alpha$	$SC_{\alpha}$	$I - 1$	$cm_{\alpha}$	$\frac{cm_{\alpha}}{cm_{\alpha B}}$	$C_{\alpha}$
Due au fact. $B$	$SC_B$	$J - 1$	$cm_B$	$\frac{cm_B}{cm_R}$	$C_B$
Interaction	$SC_{\alpha B}$	$(I - 1)(J - 1)$	$cm_{\alpha B}$	$\frac{cm_{\alpha B}}{cm_R}$	$C_{\alpha B}$
Résiduelle	$SC_R$	$IJ(K - 1)$	$cm_R$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

## Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à un facteur fixe et à un facteur aléatoire avec répétitions permet trois tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, \dots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\alpha, obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Décision

Nous concluons alors à l'aide de la  $p$ -valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil  $\alpha$  du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur  $F_{\alpha,obs}$  est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

## Tests de comparaisons multiples

Lorsque l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) est rejetée, nous pouvons procéder à des tests de comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur. Nous renvoyons au chapitre 1 qui traite des principales méthodes de comparaisons multiples.

## Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $J - 1$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

## Troisième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_{\alpha B}^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_{\alpha B}^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs  $\alpha$  et  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\alpha B, obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $(I - 1)(J - 1)$  et  $IJ(K - 1)$  degrés de liberté.

## Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
age	1	240,25	240,25	5,05	0,088
met	4	1514,94	378,73	47,19	0,000
age*met	4	190,30	47,57	5,93	0,000
Erreur	90	722,30	8,03		
Total	99	2667,79			

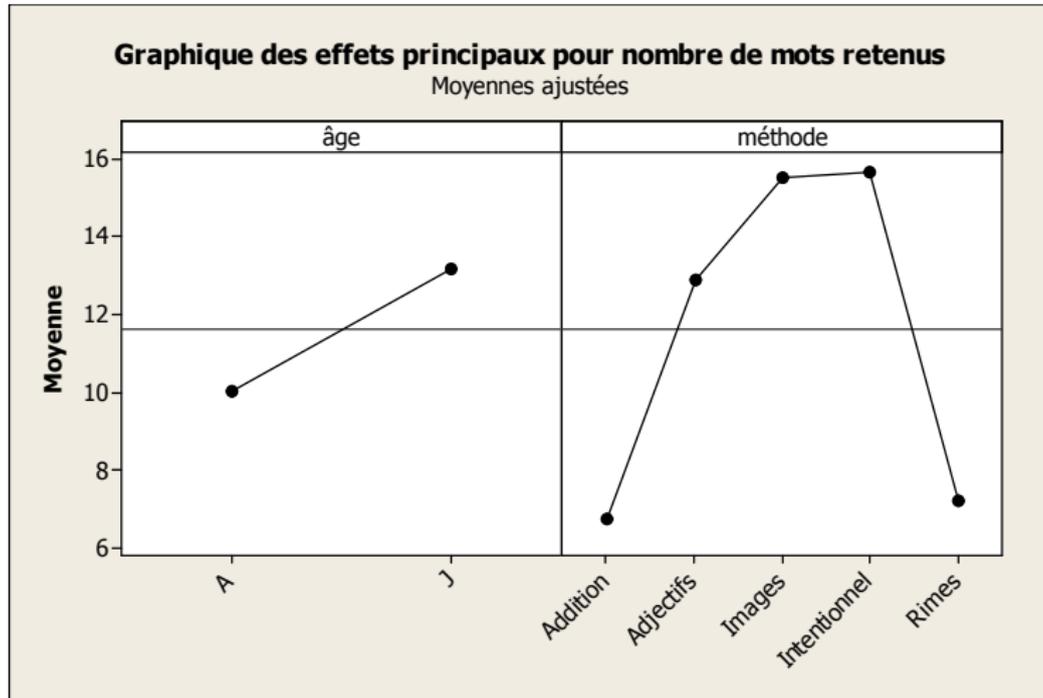
## Remarque

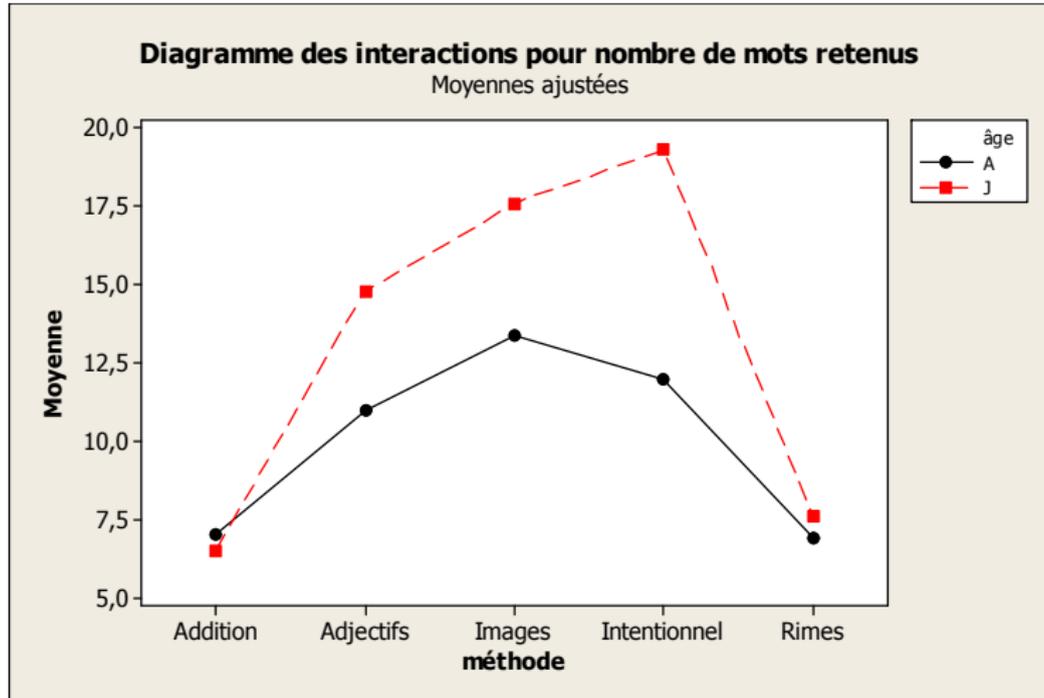
Nous allons faire une analyse des résultats, en supposant que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.

En Travaux Dirigés, vous apprendrez en particulier à vérifier la normalité du facteur à effets aléatoires.

## Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test, P-value = 0,088, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Âge ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
- 2 Pour le deuxième test, P-value = 0,035, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil  $\alpha = 5\%$ , qu'il y a un effet significatif du facteur fixe « Méthode ».
- 3 Pour le troisième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil  $\alpha = 5\%$ , qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Interaction ».





# Sommaire

- 1 Introduction
  - Quatre nouveaux modèles
- 2 **Modèle à effets aléatoires**
  - Avec répétitions
  - Sans répétition
- 3 **Modèle à effets mixtes**
  - Avec répétitions
  - **Sans répétition**

## Exemple issu du Diplôme Universitaire de Statistique

Nous reprenons les données de l'exemple que nous avons étudié dans le cas de l'analyse à deux facteurs aléatoires sans répétition. Mais cette fois-ci, nous allons considérer le facteur « Temps » comme un facteur fixe. Par contre le facteur « Lot » reste toujours un facteur aléatoire.

## Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + B_j + \varepsilon_{ij}$$

où  $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J,$

avec la contrainte supplémentaire :

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$$

où  $Y_{ij}$  est la valeur prise par la réponse  $Y$  dans les conditions  $(\alpha_i, B_j)$ .

Notons  $n = I \times J$  le nombre total de mesures ayant été effectuées.

## Contexte

- 1 Un facteur contrôlé  $\alpha$  se présente sous  $I$  modalités, chacune d'entre elles étant notée  $\alpha_j$ .
- 2 Les  $B_j$  représentent un échantillon de taille  $J$  prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des  $B_j$  sont distribués suivant une loi normale centrée de variance  $\sigma_B^2$ .

## Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

- $\mathcal{L}(B_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$ , pour tout  $j, 1 \leq j \leq J$ ,
- les effets aléatoires  $B_j$  sont indépendants.

## Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs  $\mathcal{E}_{ij}$  :

- 1 les erreurs sont indépendantes
- 2 les erreurs ont même variance  $\sigma^2$  inconnue
- 3 les erreurs sont de loi gaussienne.

## Rajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires  $B_j$  et les erreurs  $\mathcal{E}_{ij}$  sont indépendants.

## Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.

Nous utilisons les quantités  $SC_{\alpha}$ ,  $SC_B$ ,  $SC_R$ ,  $SC_{TOT}$  déjà introduites au chapitre précédent.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_{\alpha} + SC_B + SC_R.$$

## Tableau de l'ANOVA

Variation	$SC$	$ddl$	$CM$	$F_{obs}$	$F_c$
Due au facteur $\alpha$	$SC_\alpha$	$I - 1$	$cm_\alpha$	$\frac{cm_\alpha}{cm_R}$	$C_\alpha$
Due au facteur $B$	$SC_B$	$J - 1$	$cm_B$	$\frac{cm_B}{cm_R}$	$C_B$
Résiduelle	$SC_R$	$(I - 1)(J - 1)$	$cm_R$		
Totale	$SC_{TOT}$	$n - 1$			

## Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à un facteur fixe et à un facteur aléatoire sans répétition permet deux tests de Fisher.

### Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, \dots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $\alpha$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{\alpha, obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $I - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Décision

Nous concluons alors à l'aide de la  $p$ -valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil  $\alpha$  du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur  $F_{\alpha,obs}$  est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

## Comparaisons multiples

Lorsque l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur. Nous renvoyons au chapitre 1 qui traite des principales méthodes de comparaisons multiples.

## Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.$$

Sous l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ) précédente d'absence d'effet du facteur  $B$  et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées,  $F_{B,obs}$  est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à  $J - 1$  et  $(I - 1)(J - 1)$  degrés de liberté.

## Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

Analyse de la variance pour Principe actif dissous, avec utilisation de la somme des carrés ajustée pour les tests

Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
Lot	5	83,21	16,64	0,68	0,647
Temps	3	4908,46	1636,15	66,6	0,000
Erreur	15	368,29	24,55		
Total	23	5359,96			

S = 4,95508 R carré = 93,13% R carré (ajust) = 89,46%

## Analyse des résultats

- 1 Pour le premier test, P-value = 0,647, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Lot ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
- 2 Pour le deuxième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ( $\mathcal{H}_0$ ). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil  $\alpha = 5\%$ , qu'il y a un effet significatif du facteur fixe « Temps ».

## Analyse des résultats - Suite

Nous sommes maintenant capables de répondre à la question de l'expérimentateur, à savoir

« à partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ? »

puisque nous pouvons faire des comparaisons multiples, étant donné que le facteur « Temps » est maintenant fixe.

## Remarque

Nous n'avons pas présenté de graphique des effets principaux pour la dissolution du comprimé, car le graphique est identique à celui du cas où les deux facteurs sont à effets aléatoires.

## Tests de simultanéité de Tukey

Variable de réponse Principe actif dissous  
Toutes les comparaisons deux à deux sur les  
niveaux de Temps

Temps = 15 soustrait de :

		Erreur type		
Temps	Dif des moy	de la différence	Valeur de T	Valeur de p ajustée
30	27,33	2,861	9,554	0,0000
45	34,67	2,861	12,118	0,0000
60	34,83	2,861	12,176	0,0000

Temps = 30 soustrait de :

	Dif	Erreur type	Valeur	Valeur de
Temps	des moy	de la	de T	p ajustée
		différence		
45	7,333	2,861	2,563	0,0898
60	7,500	2,861	2,622	0,0809

Temps = 45 soustrait de :

		Erreur type		
	Dif	de la	Valeur	Valeur de
Temps	des moy	différence	de T	p ajustée
60	0,1667	2,861	0,05826	0,9999

Tests de simultanéité de Dunnett

Variable de réponse Principe actif dissous

Comparaisons avec niveau de contrôle

Temps = 60 soustrait de :

		Erreur type			
Temps	Dif des moy	de la différence	Valeur de T	Valeur de p ajustée	
15	-34,83	2,861	-12,18	0,0000	
30	-7,50	2,861	-2,62	0,0489	
45	-0,17	2,861	-0,06	0,9999	