T. D. n° 3
Analyse de variance à deux facteurs et régression linéaire multiple

Ces deux exercices sont issus du livre de Yadolah Dodge intitulé Analyse de régression appliquée*, éditions Dunod.*

Exercice 1. Graisse absorbée et quatre type de graisse

Pendant la cuisson les croissants absorbent la graisse en quantité variable. Nous cherchons à savoir si la quantité de graisse absorbée dépend du type de graisse. Certaines des mesures sont présentées dans le tableau suivant pour quatre types de graisse.

Graisse			
1	2	3	4
64	78	75	55
72	91	93	66
68	97	78	49
77	82	71	64
56	85	63	70
95	77	76	68

1. Calculer la moyenne générale $\hat{\mu}$ et la moyenne pour chaque groupe $\hat{\mu} + \hat{\tau}_i$.
2. Calculer le tableau d'analyse de la variance.
3. Tester l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 \;:\quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 \;:\quad \text{les valeurs des } \tau_i \text{ ne sont pas toutes égales.}$$

Exercice 2. Quatre modèles de machines à écrire

Une entreprise cherche à tester quatre modèles de machines à écrire. Pour faire ce test, elle demande à cinq secrétaires professionnelles de taper un texte pendant 5 minutes. À la fin du test, on compte le nombre moyen de mots tapés en une minute. On répète l'expérience le lendemain.
Les résultats (nombre moyen de mots par minute) sont présentés dans le tableau au verso.

	Secrétaires				
Machines à écrire	1	2	3	4	5
1	33	31	34	34	31
	36	31	36	33	31
2	32	37	40	33	35
	35	35	36	36	36
3	37	35	34	31	37
	39	35	37	35	40
4	29	31	33	31	33
	31	33	34	27	33

Soit le modèle :

$$y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}$$

avec $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,3,4,5$ et $k = 1,2$ et où α correspond à l'influence de la machine à écrire, β l'influence de la secrétaire et γ l'interaction entre la machine i et la secrétaire j.

1. On considère la forme matricielle du modèle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon.$$

   Écrire le vecteur $\mathbf{y}$ et la matrice $\mathbf{X}$ en tenant compte des contraintes habituelles pour que la matrice soit inversible.

2. Tester les trois hypothèses nulles suivantes :

   (i) Que cherche-t-on à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 \;:\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

contre

$$\mathcal{H}_1 \;:\quad \text{les valeurs des } \alpha_i \text{ ne sont pas toutes égales, } i = 1,2,3,4.$$

   (ii) Que cherche-t-on à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 \;:\quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5$$

contre

$$\mathcal{H}_1 \;:\quad \text{les valeurs des } \beta_j \text{ ne sont pas toutes égales, } j = 1,2,3,4,5.$$

   (iii) Que cherche-t-on à tester avec les deux hypothèses suivantes ?

$$\mathcal{H}_0 \;:\quad \gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = \cdots = \gamma_{1,5} = \gamma_{2,1} = \cdots = \gamma_{4,5}$$

contre

$$\mathcal{H}_1 \;:\quad \text{les valeurs des } \gamma_{i,j} \text{ ne sont pas toutes égales, } i = 1,2,3,4 \text{ et } j = 1,2,3,4,5.$$