

# Feuille de Travaux Dirigés n° 2

## Régression linéaire multiple

*Les exercices 1, 2, 5, 6 sont issus du livre « Probabilités, Statistique et technique de régression » de Gérald Baillargeon, Les éditions SMG et les exercices 3, 4 sont issus du livre « Analyse de régression appliquée » de Yadolah Dodge, Édition Dunod.*

**Exercice II.1.** Un bureau de conseil en ressources humaines a effectué une étude sur le niveau d'anxiété  $Y$  mesuré sur une échelle de 1 à 50 de cadres d'entreprises au cours d'une période de deux semaines. On veut examiner si les facteurs suivants peuvent influencer sur le niveau d'anxiété des cadres :

- $X_1$  : pression artérielle systolique
- $X_2$  : test évaluant les capacités managériales
- $X_3$  : niveau de satisfaction du poste occupé.

Le tableau d'analyse de la variance indique l'apport de chaque variable introduite dans l'ordre indiqué et ceci pour 22 cadres.

Source de variation	Somme des carrés	ddl
Régression due à $X_1$	981,326	1
Régression due à $X_2$	190,232	1
Régression due à $X_3$	129,431	1
Résiduelle	442,292	18
Totale	1743,281	21

1. Quelle est la somme des carrés due à la régression pour l'ensemble des trois variables explicatives ?
2. Quelle proportion de la variation dans le niveau d'anxiété est expliquée par les trois variables explicatives ?
3. Peut-on conclure que dans l'ensemble les trois variables explicatives ont un effet significatif sur le niveau d'anxiété ? Utiliser un seuil de signification  $\alpha = 5\%$ . Préciser les hypothèses que l'on veut tester.
4. Si on ne tient compte que de la variable explicative  $X_1$ , quel serait alors le tableau d'analyse de la variance correspondant ?

Source de variation	Somme des carrés	ddl
Régression due à $X_1$	981,326	
Résiduelle		
Totale		

5. Tester les hypothèses nulles suivantes, au seuil de signification  $\alpha = 5\%$ , en utilisant un rapport  $F$  approprié :

a)  $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$  dans le modèle  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$  ;

b)  $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0$  dans le modèle  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$  ;

c)  $\mathcal{H}_0 : \beta_3 = 0$  dans le modèle  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ .

6. Quelle est la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  associée à l'estimation de chaque modèle spécifié à la question 5. ?
7. Lequel des trois modèles semble le mieux approprié pour expliquer les fluctuations du niveau d'anxiété des cadres d'entreprises ?

**Exercice II.2.** L'entreprise CITRON fabrique un matériau en matière plastique qui est utilisé dans la fabrication de jouets. Le département de contrôle de qualité de l'entreprise a effectué une étude qui a pour but d'établir dans quelle mesure la résistance à la rupture (en  $kg/cm^2$ ) de cette matière plastique pouvait être affectée par l'épaisseur du matériau ainsi que la densité de ce matériau. Douze essais ont été effectués et les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Essai numéro	Résistance à la rupture $Y_i$	Épaisseur du matériau $X_{i_1}$	Densité $X_{i_2}$
1	37,8	4	4,0
2	22,5	4	3,6
3	17,1	3	3,1
4	10,8	2	3,2
5	7,2	1	3,0
6	42,3	6	3,8
7	30,2	4	3,8
8	19,4	4	2,9
9	14,8	1	3,8
10	9,5	1	2,8
11	32,4	3	3,4
12	21,6	4	2,8

Diverses analyses ont été effectuées sur ordinateur et on les résume dans les trois tableaux suivants :

**Régression de la résistance à la rupture  $Y$  en fonction de l'épaisseur  $X_1$**

Coefficients $\hat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\hat{\beta}_j)$	Source de variation	Somme des carrés	$ddl$
$\hat{\beta}_0 = 3,523$	$s(\hat{\beta}_1) = 1,279$	Régression $X_1$	980,64	1
$\hat{\beta}_1 = 6,036$		Résiduelle	440,03	10

**Régression de la résistance à la rupture  $Y$  en fonction de la densité  $X_2$**

Coefficients $\hat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\hat{\beta}_j)$	Source de variation	Somme des carrés	$ddl$
$\hat{\beta}_0 = -36,37$	$s(\hat{\beta}_2) = 6,069$	Régression $X_2$	643,57	1
$\hat{\beta}_2 = 17,464$		Résiduelle	777,10	10

**Régression de la résistance à la rupture  $Y$  en fonction de l'épaisseur  $X_1$  et de la densité  $X_2$**

Coefficients $\hat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\hat{\beta}_j)$	Source de variation	Somme des carrés	<i>ddl</i>
$\hat{\beta}_0 = -30,08$		Régression ( $X_1, X_2$ )	1204,86	2
$\hat{\beta}_1 = 4,905$	$s(\hat{\beta}_1) = 1,014$	Résiduelle	215,81	9
$\hat{\beta}_2 = 11,072$	$s(\hat{\beta}_2) = 3,621$			

1. Quel pourcentage de variation dans la résistance à la rupture est expliquée par chacune des régressions ?
2. Pour chaque régression linéaire, compléter le tableau suivant :

	Carré moyen résiduel	Écart-type des résidus
Régression due à $X_1$		
Régression due à $X_2$		
Régression due à ( $X_1, X_2$ )		

3. Compléter le tableau d'analyse de la variance suivant pour la régression comportant les deux variables explicatives.

Source de variation	Somme des carrés	<i>ddl</i>	Carrés moyens	$F_{obs}$
Régression due à ( $X_1, X_2$ )				
Résiduelle				
Totale				

4. Tester au seuil de signification  $\alpha = 5\%$ , l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 : \text{au moins un des } \beta \neq 0.$$

Quelle est votre conclusion ?

5. Dans le cas du modèle de régression linéaire ne comportant que l'épaisseur du matériau comme variable explicative, déterminer un intervalle de confiance à 95% pour  $\beta_1$ .
6. Avec l'intervalle de confiance calculé à la question 5., peut-on affirmer, au seuil de signification  $\alpha = 5\%$ , que la régression linéaire est significative entre la résistance à la rupture et l'épaisseur du matériau ? Justifier votre conclusion.
7. Quel est l'apport marginal de la variable  $X_2$  lorsqu'elle est introduite à la suite de la variable  $X_1$  ?
8. Est-ce que la contribution marginale de la variable « densité du matériau », lorsqu'elle est introduite à la suite de la variable « épaisseur du matériau » est significative au seuil de signification  $\alpha = 5\%$  ? Utiliser les deux façons équivalentes d'effectuer ce test.

« $F$ partiel »	$F_c$	$t_{obs}$	$t_c$

9. On veut obtenir diverses estimations et prévisions de la résistance à la rupture. Quelle est, en moyenne, la résistance à la rupture de jouets dont l'épaisseur du matériau utilisé et la densité du matériau sont celles indiquées dans le tableau suivant ?

Épaisseur $X_1$	Densité $X_2$	Estimation de la résistance moyenne	Écart-type de l'estimation
4	3,8		2,10
3	3,4		1,43
4	2,9		2,57

10. Entre quelles valeurs peut se situer la résistance moyenne à la rupture, pour des jouets dont l'épaisseur du matériau est  $X_1 = 4$  et la densité du matériau est  $X_2 = 3,8$ , si l'entreprise utilise un niveau de confiance de 95% ?
11. Quelle est la marge d'erreur dans l'estimation effectuée à la question 10. ?

**Exercice II.3.** On utilise le modèle de régression linéaire multiple :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

1. Compléter le tableau d'analyse de variance suivant :

Source de variation	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens	$F_{obs}$
Régression	1 504,4			
Résiduelle			19,6	
Totale	1 680,8			

2. Tester l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 : \text{au moins un des } \beta \neq 0.$$

3. Quel est le coefficient de détermination  $R^2$  du modèle ?
4. Donner une estimation de la variance de  $\varepsilon$ .

**Exercice II.4.** Les données proposées dans cet exercice présentent le taux de décès par attaque cardiaque chez les hommes de 55 à 59 ans dans différents pays.

Les variables sont les suivantes :

- $Y$  :  $100 [\log(\text{nombre de décès par crise cardiaque pour 100 000 hommes de 55 à 59 ans}) - 2]$  ;
- $X_1$  : téléphones par millier d'habitants ;
- $X_2$  : calories grasses en pourcentage du total des calories ;
- $X_3$  : calories provenant de protéines animales en pourcentage du total des calories.

1. Régresser  $Y$  sur  $X_1$  et tester la signification de cette régression linéaire simple.
2. Trouver l'équation de la régression linéaire multiple de  $Y$  sur  $X_1$  et  $X_2$ .
3. Effectuer un test conjoint d'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ .
4. Tester si l'adjonction de la variable  $X_2$  à l'équation trouvée à la question 1. a significativement amélioré l'estimation.
5. Construire la régression linéaire multiple de  $Y$  sur  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .

6. Donner les limites de l'intervalle de confiance à 95% pour  $\beta_3$  dans cette équation.
7. Donner les limites de l'intervalle de confiance à 95% pour  $\hat{Y}$  au point  $X_1 = 221$ ,  $X_2 = 39$  et  $X_3 = 7$ .
8. Tester si  $X_2$  et  $X_3$  ensemble apportent quelque chose à la régression linéaire simple de  $Y$  sur  $X_1$ .
9. Régresser  $X_1$  sur  $X_2$  et  $X_3$ .
10. Donner les limites de l'intervalle de confiance à 95% pour les coefficients de la régression linéaire de  $X_1$  sur  $X_3$ .

Observation i	Pays	$X_1$ $x_{1i}$	$X_2$ $x_{2i}$	$X_3$ $x_{3i}$	$Y$ $x_{4i}$
1	Australie	124	33	8	81
2	Autriche	49	31	6	55
3	Canada	181	38	8	80
4	Ceylan	4	17	2	24
5	Chili	22	20	4	78
6	Danemark	152	39	6	52
7	Finlande	75	30	7	88
8	France	54	29	7	45
9	Allemagne	43	35	6	50
10	Irlande	41	31	5	69
11	Israël	17	23	4	66
12	Italie	22	21	3	45
13	Japon	16	8	3	24
14	Mexique	10	23	3	43
15	Pays-Bas	63	37	6	38
16	Nouvelle-Zélande	170	40	8	72
17	Norvège	125	38	6	41
18	Portugal	12	25	4	38
19	Suède	221	39	7	52
20	Suisse	171	33	7	52
21	Grande-Bretagne	97	38	6	66
22	États-Unis	254	39	8	89

**Exercice II.5.** Dans une étude de régression linéaire multiple comportant quatre variables explicatives  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , on a obtenu le tableau d'analyse de la variance suivant, et ceci pour 20 observations.

Source de variation	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens
Régression ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ )	85 570	4	21 392,50
Résiduelle	1 426	15	95,07
Totale	86 996	19	

1. Est-ce que la régression est significative dans son ensemble ? Utiliser  $\alpha = 5\%$ .
2. Une de vos collègues mentionne que les variables  $X_3$  et  $X_4$  sont inutiles dans le modèle de régression linéaire. Une autre analyse de régression linéaire ne

comportant cette fois que les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$  conduit au tableau d'analyse de la variance suivant.

Source de variation	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens
Régression ( $X_1, X_2$ )	62 983	2	31 491,50
Résiduelle	24 013	17	1 412,53
Totale	86 996	19	

Est-ce que l'affirmation de votre collègue est vraisemblable au seuil de signification  $\alpha = 5\%$ ? Effectuer le test approprié.

**Exercice II.6.** Dans une étude de régression multiple comportant quatre variables explicatives et 20 observations, on a introduit, dans l'ordre, les variables  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .

Variables explicatives dans l'équation	Variable ad-ditionnelle	Écart-type des résidus	Proportion de la variation expliquée
Aucune		$s_Y = 2,7456$	
$X_1$	$X_1$	1,8968	0,5480
$X_1, X_2$	$X_2$	1,6352	0,6830
$X_1, X_2, X_3$	$X_3$	0,7349	0,9400
$X_1, X_2, X_3, X_4$	$X_4$	0,6281	0,9590

1. Dans quelle proportion la variation non expliquée par  $X_1$  est réduite avec l'ajout de  $X_2$  dans l'équation de régression?
2. Quelle est la corrélation partielle entre  $Y$  et  $X_3$  après s'être débarrassé de l'influence des variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$  sur  $Y$  et  $X_3$ ? On considère que le coefficient de régression  $\hat{\beta}_3$  est négatif.
3. Déterminer la somme de carrés résiduelle lorsque les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$  sont dans l'équation de régression.
4. Quelle est la somme de carrés de régression attribuable à  $X_3$  lorsqu'on ajoute cette variable à la suite de  $X_1$  et  $X_2$ ?
5. Quelle est la somme de carrés de régression attribuable à  $X_4$  lorsqu'on ajoute cette variable à la suite de  $X_1, X_2$  et  $X_3$ ?

**Exercice II.7.** Supposons que dans l'exercice précédent, les variables ont été introduites dans l'ordre suivant :  $X_2, X_3, X_4, X_1$ . On a alors le tableau suivant :

Variables explicatives dans l'équation	Variable ad- ditionnelle	Écart-type des résidus
Aucune		$s_Y = 2,7456$
$X_2$	$X_2$	2,8116
$X_2, X_3$	$X_3$	2,5486
$X_2, X_3, X_4$	$X_4$	2,4935
$X_2, X_3, X_4, X_1$	$X_1$	0,6281

1. Déterminer les coefficients de détermination multiple suivants :  $R_{Y,2}^2$ ,  $R_{Y,2,3}^2$ ,  $R_{Y,2,3,4}^2$ ,  $R_{Y,2,3,4,1}^2$ .
2. Déterminer la somme de carrés résiduelle lorsque les variables explicatives  $X_2$  et  $X_3$  sont dans l'équation de régression linéaire.
3. Déterminer les coefficients de détermination partielle suivants :  $r_{Y,3,2}^2$ ,  $r_{Y,4,2,3}^2$ ,  $r_{Y,1,2,3,4}^2$ .
4. Quelle est la corrélation partielle entre  $Y$  et  $X_3$  après s'être débarrassé de l'influence de  $X_2$  sur  $Y$  et  $X_3$ ? On suppose que le coefficient de  $\beta_3$  peut être négatif.
5. Quelle est la somme de carrés de régression attribuable à  $X_4$  lorsqu'on ajoute cette variable à la suite de  $X_2$  et  $X_3$ ?
6. Quelle est la somme de carrés de régression attribuable à  $X_1$  lorsqu'on ajoute cette variable à la suite de  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$ ?