Modèles aléatoires et mixtes de l'analyse de la variance à deux facteurs

Frédéric Bertrand[1]

[1]IRMA, Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Master 1re année
22-10-2008

Référence

Ce cours s'appuie essentiellement sur

1. le livre de David C. Howell,
   Méthodes statistiques en sciences humaines
   traduit de la sixième édition américaine
   aux éditions de boeck, 2008.
2. le livre de Pierre Dagnelie,
   Statistique théorique et appliquée
   Tome 2
   aux éditions de boeck, 1998.

Deux nouveaux modèles

Comme nous l'avons vu dans le chapitre « Compléments sur l'analyse de la variance à un facteur », il se peut que les deux facteurs ne soient pas tous les deux à effets fixes. Par conséquent, en combinant toutes les possibilités, il va y avoir quatre autres modèles :

1. Un modèle avec deux facteurs aléatoires, avec ou sans répétitions. Ce modèle est appelé un modèle à effets aléatoires.
2. Un modèle avec un facteur aléatoire et un facteur fixe, avec ou sans répétitions.
   Ce modèle est appelé un modèle à effets mixtes.

Exemple issu du livre de Dagnelie

Les responsables d'un laboratoire d'analyse chimique par spectrométrie dans le proche infrarouge se sont intéressés à la variabilité des résultats qu'ils obtenaient pour les mesures des teneurs en protéines du blé.
En particulier, ils se sont interrogés sur l'importance des différences qui pouvaient découler des étapes successives de préparation des matières à analyser.
Nous considérons ici le problème du broyage, en examinant les résultats obtenus à l'aide de trois moulins.

Suite de la mise en situation

Cinq échantillons de grains de blé ont été prélevés au hasard dans un arrivage relativement important, et divisés chacun en six sous-échantillons.
Pour chacun des échantillons, les sous-échantillons ont ensuite été affectés au hasard à trois moulins qui eux-mêmes ont été choisis au hasard dans une production de moulins.
Pour terminer, une analyse chimique a été effectuée dans chaque cas. Le tableau ci-dessous présente les résultats, à savoir les mesures des teneurs en protéines, exprimées en pourcentage de la matière sèche.

Introduction
Modèle à effets aléatoires
Modèle à effets mixtes
Avec répétitions
Sans répétition

Tableau des données

Moulin/Échantillon	1	2	3	4	5
1	13,33	13,62	13,53	13,60	13,97
	13,43	13,33	13,75	13,44	13,32
2	13,04	13,26	13,49	13,05	13,28
	13,34	13,49	13,59	13,44	13,67
3	13,24	13,33	13,07	13,47	13,46
	13,25	13,46	13,33	13,04	13,32

Remarque

Le modèle d'analyse de la variance qui peut être envisagé pour analyser ces données est un modèle à deux facteurs aléatoires avec répétitions.

Frédéric Bertrand
Modèles aléatoires et mixtes de l'ANOVA à 2 facteurs

Introduction
Modèle à effets aléatoires
Modèle à effets mixtes
Avec répétitions
Sans répétition

Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \mathcal{E}_{ijk},$$

où $i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J, k = 1, \ldots, K$,
où Y_{ijk} est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) lors du $k-$ème essai.
Notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Frédéric Bertrand
Modèles aléatoires et mixtes de l'ANOVA à 2 facteurs

Introduction
Modèle à effets aléatoires
Modèle à effets mixtes
Avec répétitions
Sans répétition

Contexte

- Les termes A_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2.
- Les termes B_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2.
- Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue.

Frédéric Bertrand
Modèles aléatoires et mixtes de l'ANOVA à 2 facteurs

Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A_i) &= \mathcal{N}(0,\sigma_A^2), \text{ pour tout } i, \quad 1 \leqslant i \leqslant I,\\ \mathcal{L}(B_j) &= \mathcal{N}(0,\sigma_B^2), \text{ pour tout } j, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,\\ \mathcal{L}((AB)_{ij}) &= \mathcal{N}(0,\sigma_{AB}^2), \text{ pour tout } (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\end{aligned}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires A_i sont indépendants
- les effets aléatoires B_j sont indépendants
- les effets aléatoires $(AB)_{ij}$ sont indépendants
- les effets aléatoires A_i et B_j sont indépendants
- les effets aléatoires A_i et $(AB)_{ij}$ sont indépendants
- les effets aléatoires B_j et $(AB)_{ij}$ sont indépendants.

Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$:

1. les erreurs sont indépendantes
2. les erreurs ont même variance σ^2 inconnue
3. les erreurs sont de loi gaussienne.

Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires A_i et les erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$ sont indépendants
- les effets aléatoires B_j et les erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$ sont indépendants
- les effets aléatoires $(AB)_{ij}$ et les erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$ sont indépendants.

Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.
Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_{AB}, SC_R, SC_{TOT} déjà introduites au chapitre précédent.
Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R.$$

Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur A	SC_A	$I-1$	s_A^2	$\frac{s_A^2}{s_{AB}^2}$	c
Due au facteur B	SC_B	$J-1$	s_B^2	$\frac{s_B^2}{s_{AB}^2}$	c
Interaction	SC_{AB}	$(I-1)(J-1)$	s_{AB}^2	$\frac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	c
Résiduelle	SC_R	$IJ(K-1)$	s_R^2		
Totale	SC_{TOT}	$n-1$			

Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires avec répétitions permet trois tests de Fisher.

Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_A^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{A,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{B,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Troisième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{AB,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

```
Analyse de la variance pour Teneurs en
proteines, avec utilisation de la somme des
carrés ajustée pour les tests
 Source    DL  SomCar séq  CM ajust     F      P
 Mou        2     0,29246   0,14623  8,70  0,010
 Ech        4     0,20731   0,05183  3,08  0,082
 Mou*Ech    8     0,13451   0,01681  0,38  0,917
 Erreur    15     0,66840   0,04456
 Total     29     1,30268
S = 0,211092 R carré = 48,69% R carré (ajust)
= 0,80 %
```

Remarque

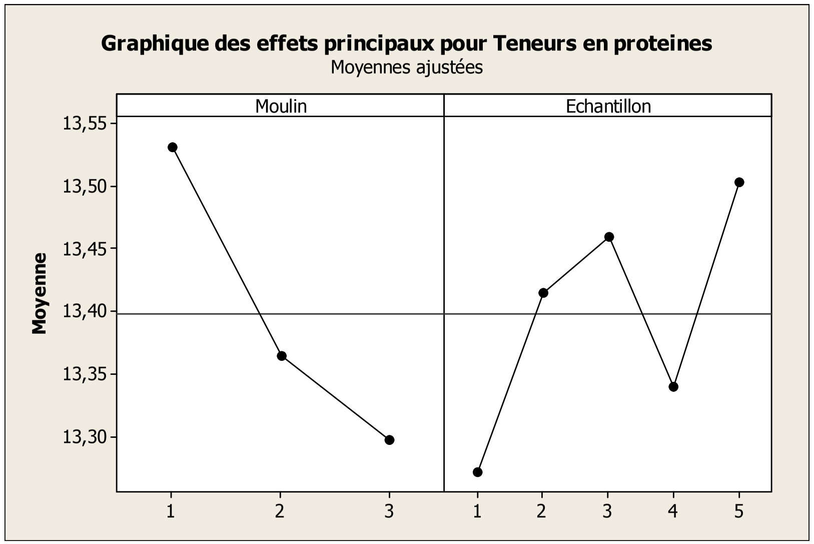
Nous supposons que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.

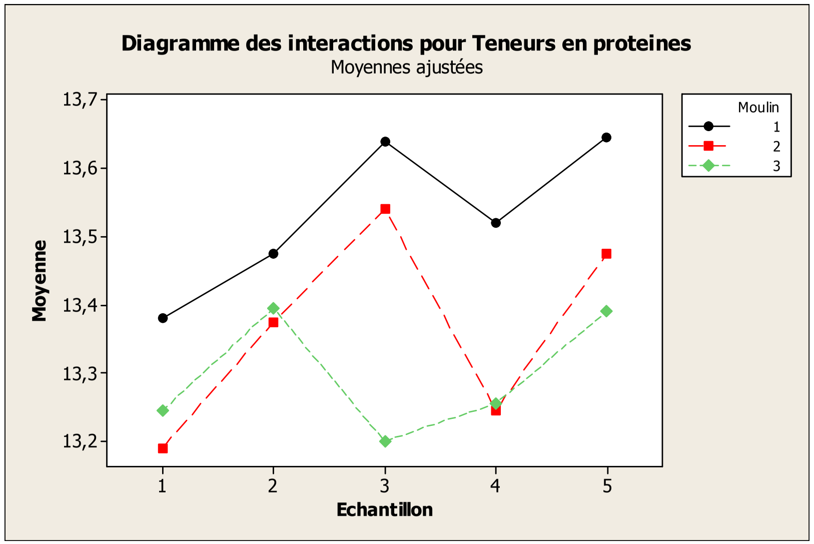
Analyse des résultats

1. Pour le premier test, P-value = 0,010, nous décidons, au seuil $\alpha = 5\%$, de refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous pouvons dire qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Moulin ».
   Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui vaut 5%.

Analyse des résultats - Suite et fin

2. Pour le deuxième test, P-value = 0,082, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Échantillon ».
   Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
3. Pour le troisième test, P-value = 0,917, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Interaction ».
   Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.





Exemple issu du Diplôme Universitaire de Statistique

Nous étudions la dissolution du principe actif contenu dans un type donné de comprimé. Pour cela la dissolution de six comprimés pris au hasard est observée. Les pourcentages de principe actif dissous, par rapport à la valeur titre, après 15, 30, 45 et 60 minutes sont donnés dans le tableau qui va suivre. Il est à noter que les temps d'observation à savoir, 15, 30, 45 et 60 minutes sont des temps qui ont été choisis aléatoirement par l'expérimentateur qui n'avait pas de connaissance a priori sur ces six compirmés.

Tableau des données

Comprimé/Temps	15 min	30 min	45 min	60 min
Comprimé 1	66	87	93	90
Comprimé 2	60	91	99	98
Comprimé 3	69	91	93	92
Comprimé 4	61	97	97	101
Comprimé 5	61	84	106	103
Comprimé 6	57	88	94	99

Question que se pose l'expérimentateur

À partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ?

Modèle statistique

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ij} = \mu + A_i + B_j + \mathcal{E}_{ij},$$

où $i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J$,
où Y_{ij} est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j).
Notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Contexte

- Les termes A_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2.
- Les termes B_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2.

Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\mathcal{L}(A_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), \text{ pour tout } i, \quad 1 \leqslant i \leqslant I,$$
$$\mathcal{L}(B_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \text{pour tout } j, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires A_i sont indépendants
- les effets aléatoires B_j sont indépendants
- les effets aléatoires A_i et B_j sont indépendants.

Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs $\mathcal{E}_{ij}$:

1. les erreurs sont indépendantes
2. les erreurs ont même variance σ^2 inconnue
3. les erreurs sont de loi gaussienne.

Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires A_i et les erreurs $\mathcal{E}_{ij}$ sont indépendants
- les effets aléatoires B_j et les erreurs $\mathcal{E}_{ij}$ sont indépendants.

Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.
Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_R, SC_{TOT} déjà introduites au chapitre précédent.
Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R.$$

Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur A	SC_A	$I-1$	s_A^2	$\frac{s_A^2}{s_R^2}$	c
Due au facteur B	SC_B	$J-1$	s_B^2	$\frac{s_B^2}{s_R^2}$	c
Résiduelle	SC_R	$(I-1)(J-1)$	s_R^2		
Totale	SC_{TOT}	$n-1$			

Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à deux facteurs aléatoires sans répétition permet deux tests de Fisher.

Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_A^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{A,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{B,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

```
Analyse de la variance pour Principe actif
dissous, avec utilisation de la somme des
carrés ajustée pour les tests
 Source     DL  SomCar séq  CM ajust     F      P
 Comprimé    5       83,21     16,64  0,68  0,647
 Temps       3     4908,46   1636,15  66,6  0,000
 Erreur     15      368,29     24,55
 Total      23     5359,96
S = 4,95508 R carré = 93,13% R carré (ajust) =
89,46%
```


Analyse des résultats

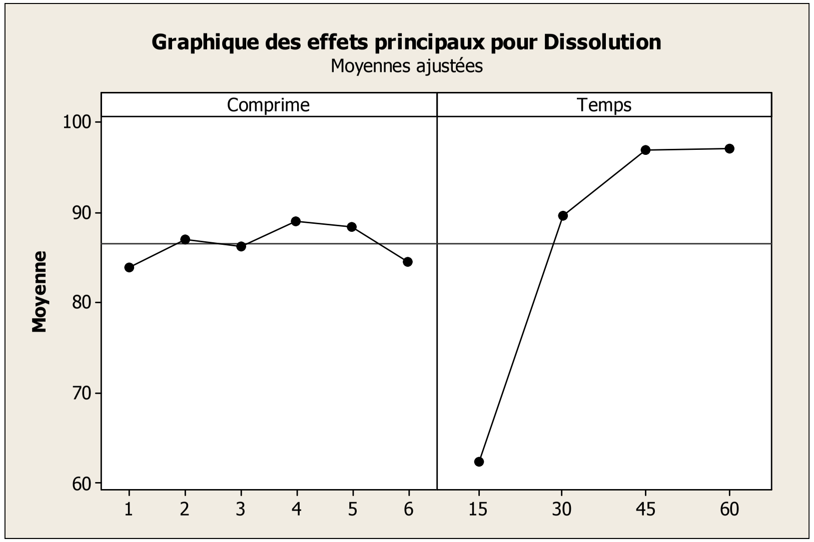
1. Pour le premier test, P-value = 0,647, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$. Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Comprimé ».
   Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
2. Pour le deuxième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$. Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil $\alpha = 5\%$, qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Temps ».

Analyse des résultats - Suite et fin

Nous ne sommes pas capables de répondre à la question de l'expérimentateur, à savoir :
« à partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ? »
puisque nous ne pouvons pas faire de tests de comparaisons multiples, étant donné que le facteur « Temps » est à effets aléatoires.

Remarque

Bien sûr, nous pouvons faire cette analyse des rssultats, si auparavant nous avons vérifié que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons ultérieurement.



Exemple issu du livre de Howell

Eysenck (1974) a mené une étude (cette étude a été introduite dans la feuille de TD numéro 1) qui faisait varier aussi bien l'âge que la condition de rétention. L'étude incluait 50 participants dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans, ainsi que 50 participants compris dans la tranche d'âge 55-65 ans. Pour plus de facilité, nous avons regroupé les 50 participants dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans dans une classe que nous appelerons « sujets jeunes » et les 50 participants dont l'âge se situait entre 55 et 65 ans dans une classe que nous allons appeler « sujets âgés ». Les données sont présentées dans le tableau suivant :

Exemple : **Sujets jeunes**

Addition	Rimes	Adjectifs	Images	Intentionnel
8	10	14	20	21
6	7	11	16	19
4	8	18	16	17
6	10	14	15	15
7	4	13	18	22
6	7	22	16	16
5	10	17	20	22
7	6	16	22	22
9	7	12	14	18
7	7	11	19	21

Exemple : **Sujets âgés**

Addition	Rimes	Adjectifs	Images	Intentionnel
9	7	11	12	10
8	9	13	11	19
6	6	8	16	14
8	6	6	11	5
10	6	14	9	10
4	11	11	23	11
6	6	13	12	14
5	3	13	10	15
7	8	10	19	11
7	7	11	11	11

Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + (\alpha B)_{ij} + \mathcal{E}_{ijk}$$

où $i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J, k = 1, \ldots, K$,
avec les contraintes supplémentaires :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{I} (\alpha B)_{ij} = 0, \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, J\}$$

où Y_{ijk} est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (α_i, B_j) lors du $k-$ème essai.
Notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Contexte

1. Un facteur contrôlé α se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée α_i.
2. Les B_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2.
3. Pour chacun des couples de modalités (α_i, B_j) nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue.

Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B_j) &= \mathcal{N}(0, \sigma_B^2), \text{ pour tout } j, 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}((\alpha B)_{ij}) &= \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha B}^2), \text{ pour tout } (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J, \end{aligned}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

- les effets aléatoires B_j sont indépendants
- les effets aléatoires $(\alpha B)_{ij}$ sont indépendants
- les effets aléatoires B_j et $(\alpha B)_{ij}$ sont indépendants.

Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$:

1. les erreurs sont indépendantes
2. les erreurs ont même variance σ^2 inconnue
3. les erreurs sont de loi gaussienne.

Ajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires B_j et les erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$ sont indépendants
- les effets aléatoires $(\alpha B)_{ij}$ et les erreurs $\mathcal{E}_{ijk}$ sont indépendants.

Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.
Nous utilisons les quantités SC_α, SC_B, $SC_{\alpha B}$, SC_R, SC_{TOT} déjà introduites au chapitre précédent.
Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_\alpha + SC_B + SC_{\alpha B} + SC_R.$$

Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur α	SC_α	$I-1$	s^2_α	$\frac{s^2_\alpha}{s^2_{\alpha B}}$	c
Due au facteur B	SC_B	$J-1$	s^2_B	$\frac{s^2_B}{s^2_R}$	c
Interaction	$SC_{\alpha B}$	$(I-1)(J-1)$	$s^2_{\alpha B}$	$\frac{s^2_{\alpha B}}{s^2_R}$	c
Résiduelle	SC_R	$IJ(K-1)$	s^2_R		
Totale	SC_{TOT}	$n-1$			

Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à un facteur fixe et à un facteur aléatoire avec répétitions permet trois tests de Fisher.

Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur α et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{\alpha,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Décision

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $F_{\alpha,obs}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Tests de comparaisons multiples

Lorsque l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ est rejetée, nous pouvons procéder à des tests de comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur. Nous renvoyons au chapitre 1 qui traite des principales méthodes de comparaisons multiples.

Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{B,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Troisième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_{\alpha B}^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_{\alpha B}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs α et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{\alpha B,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

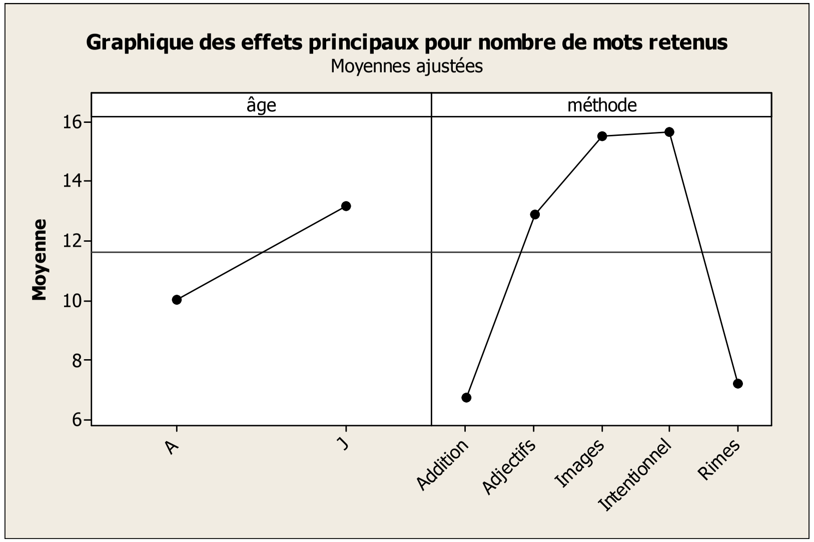
Source	DL	SomCar séq	CM ajust	F	P
age	1	240,25	240,25	5,05	0,088
met	4	1514,94	378,73	7,96	0,035
age*met	4	190,30	47,57	5,93	0,000
Erreur	90	722,30	8,03		
Total	99	2667,79			

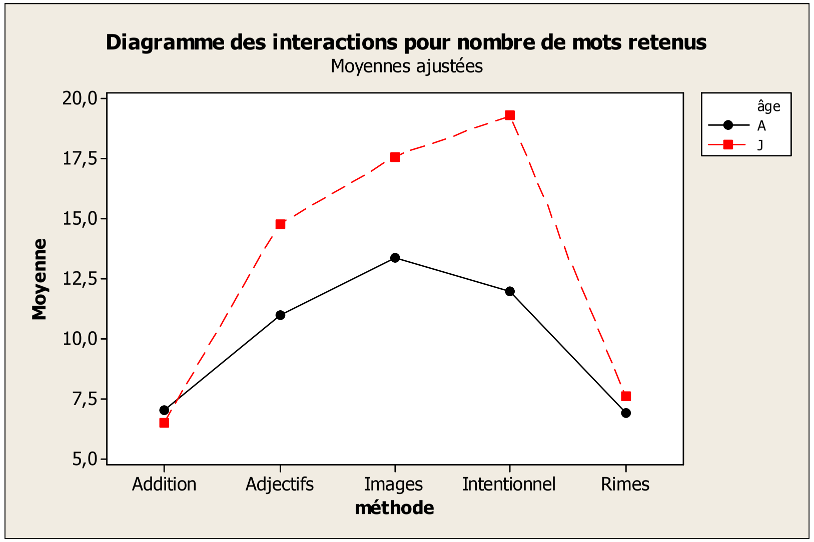
Remarque

Nous allons faire une analyse des résultats, en supposant que les conditions du modèle sont bien remplies. Ce que nous vérifierons par la suite.
En Travaux Dirigés, vous apprendrez en particulier à vérifier la normalité du facteur à effets aléatoires.

Analyse des résultats

1. Pour le premier test, P-value = 0,088, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Âge ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
2. Pour le deuxième test, P-value = 0,035, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil $\alpha = 5\%$, qu'il y a un effet significatif du facteur fixe « Méthode ».
3. Pour le troisième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle ($\mathcal{H}_0$). Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil $\alpha = 5\%$, qu'il y a un effet significatif du facteur aléatoire « Interaction ».





Exemple issu du Diplôme Universitaire de Statistique

Nous reprenons les données de l'exemple que nous avions étudié dans le cas de l'analyse à deux facteurs aléatoires sans répétition. Mais cette fois-ci, nous allons considérer le facteur « Temps » comme un facteur fixe. Par contre le facteur « Comprimé » reste toujours un facteur aléatoire.

Le modèle

Le modèle statistique s'écrit de la façon suivante :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + B_j + \mathcal{E}_{ij}$$

où $i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J$,
avec la contrainte supplémentaire :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$$

où Y_{ij} est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (α_i, B_j).
Notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Contexte

1. Un facteur contrôlé α se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée α_i.
2. Les B_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2.

Conditions liées à ce type d'analyse

Nous supposons que

- $\mathcal{L}\left(B_j\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$, pour tout $j, 1 \leqslant j \leqslant J$,
- les effets aléatoires B_j sont indépendants.

Conditions classiques de l'ANOVA

Nous postulons les hypothèses classiques de l'ANOVA pour les variables erreurs $\mathcal{E}_{ij}$:

1. les erreurs sont indépendantes
2. les erreurs ont même variance σ^2 inconnue
3. les erreurs sont de loi gaussienne.

Rajout de conditions

Nous ajoutons l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs due à ce type d'analyse :

- les effets aléatoires B_j et les erreurs $\mathcal{E}_{ij}$ sont indépendants.

Relation fondamentale de l'ANOVA

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies.
Nous utilisons les quantités SC_α, SC_B, SC_R, SC_{TOT} déjà introduites au chapitre précédent.
Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_\alpha + SC_B + SC_R.$$

Tableau de l'ANOVA

Variation	SC	ddl	s^2	F_{obs}	F_c
Due au facteur α	SC_α	$I-1$	s^2_α	$\frac{s^2_\alpha}{s^2_R}$	c
Due au facteur B	SC_B	$J-1$	s^2_B	$\frac{s^2_B}{s^2_R}$	c
Résiduelle	SC_R	$(I-1)(J-1)$	s^2_R		
Totale	SC_{TOT}	$n-1$			

Tests d'hypothèses

L'analyse de la variance à un faceur fixe et à un facteur aléatoire sans répétition permet deux tests de Fisher.

Premier test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \text{Il existe } i_0 \in \{1, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur α et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{\alpha,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Décision

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $F_{\alpha,obs}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Comparaisons multiples

Lorsque l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur. Nous renvoyons au chapitre 1 qui traite des principales méthodes de comparaisons multiples.

Deuxième test

Nous testons l'hypothèse nulle

$$\boxed{(\mathcal{H}_0) : \sigma_B^2 = 0}$$

contre l'hypothèse alternative

$$\boxed{(\mathcal{H}_1) : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $F_{B,obs}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Retour à l'exemple - Sortie avec MINITAB

```
Analyse de la variance pour Principe actif
dissous, avec utilisation de la somme des
carrés ajustée pour les tests
 Source     DL  SomCar séq  CM ajust     F      P
 Comprimé    5       83,21     16,64  0,68  0,647
 Temps       3     4908,46   1636,15  66,6  0,000
 Erreur     15      368,29     24,55
 Total      23     5359,96
S = 4,95508 R carré = 93,13% R carré (ajust) =
89,46%
```


Analyse des résultats

1. Pour le premier test, P-value = 0,647, nous décidons de ne pas refuser l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$. Par conséquent, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence d'effet du facteur aléatoire « Comprimé ». Le risque associé à cette décision est un risque de deuxième espèce. Pour l'évaluer, il resterait à calculer la puissance de ce test.
2. Pour le deuxième test, P-value = 0,000, nous décidons de refuser l'hypothèse nulle $(\mathcal{H}_0)$. Par conséquent, nous pouvons dire, au seuil $\alpha = 5\%$, qu'il y a un effet significatif du facteur fixe « Temps ».

Analyse des résultats - Suite

Nous sommes maintenant capables de répondre à la question de l'expérimentateur, à savoir
« à partir de quel instant pouvons-nous admettre qu'un comprimé est entièrement dissous ? »
puisque nous pouvons faire des comparaisons multiples, étant donné que le facteur « Temps » est maintenant fixe.

Remarque

Nous n'avons pas présenté de graphique des effets principaux pour la dissolution du comprimé, car le graphique est identique à celui du cas où les deux facteurs sont à effets aléatoires.


```
Tests de simultanéité de Tukey
Variable de réponse Principe actif dissous
Toutes les comparaisons deux à deux sur les
niveaux de Temps
Temps = 15 soustrait de :
                      Erreur type
             Dif            de la   Valeur  Valeur de
 Temps   des moy      différence    de T  p ajustée
 30        27,33            2,861   9,554     0,0000
 45        34,67            2,861  12,118     0,0000
 60        34,83            2,861  12,176     0,0000
```



```
Temps = 30 soustrait de :
                Erreur type
           Dif        de la  Valeur  Valeur de
 Temps  des moy  différence    de T  p ajustée
 45       7,333       2,861   2,563     0,0898
 60       7,500       2,861   2,622     0,0809
```



```
Temps = 45 soustrait de :
                      Erreur type
             Dif            de la    Valeur  Valeur de
 Temps   des moy      différence      de T  p ajustée
 60       0,1667            2,861  0,05826     0,9999
```