EXEMPLE QUI ILLUSTRE LA RÉGRESSION MULTIPLE (COURS 2)

FRÉDÉRIC BERTRAND ET MYRIAM MAUMY-BERTRAND

Je vais traiter cet exemple sans me servir du logiciel `R` *ou presque et faire tous les calculs « à la main » pour vous montrer au moins une fois dans ce cours comment nous appliquons les formules mathématiques qui sont données dans ce cours.*

Les données présentées dans le tableau ci-dessous concernent 9 entreprises de l'industrie chimique. Nous cherchons à établir une relation entre la production y_i, les heures de travail x_{i1} et le capital utilisé x_{i2}.

Tableau - Production, travail et capital

Entreprise i	Travail (heures) x_{i1}	Capital (machines/heures) x_{i2}	Production (100 tonnes) y_i
1	1 100	300	60
2	1 200	400	120
3	1 430	420	190
4	1 500	400	250
5	1 520	510	300
6	1 620	590	360
7	1 800	600	380
8	1 820	630	430
9	1 800	610	440

Nous faisons donc l'hypothèse d'un modèle de régression linéaire multiple avec 2 variables explicatives, c'est-à-dire en notation vectorielle :

$$\vec{y} = \beta_0 \vec{1} + \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2 + \vec{\varepsilon}$$

ou encore en notation matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \\ 360 \\ 380 \\ 430 \\ 440 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1\,100 & 300 \\ 1 & 1\,200 & 400 \\ 1 & 1\,430 & 420 \\ 1 & 1\,500 & 400 \\ 1 & 1\,520 & 510 \\ 1 & 1\,620 & 590 \\ 1 & 1\,800 & 600 \\ 1 & 1\,820 & 630 \\ 1 & 1\,800 & 610 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit de calculer le vecteur des estimateurs $\widehat{\beta}$ défini par l'égalité suivante :

$$\widehat{\beta} = ({}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}{}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{y}.$$

Pour cela, nous calculons :

$$({}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 9 & 13\,790 & 4\,460 \\ 13\,790 & 21\,672\,100 & 7\,066\,200 \\ 4\,460 & 7\,066\,200 & 2\,323\,600 \end{bmatrix}$$

$$({}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 6,304\,777 & -0,007\,800 & 0,011\,620 \\ -0,007\,800 & 0,000\,015 & -0,000\,031 \\ 0,011\,620 & -0,000\,031 & 0,000\,072 \end{bmatrix}$$

et :

$${}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2\,530 \\ 4\,154\,500 \\ 1\,378\,500 \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\widehat{\beta} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = ({}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}{}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -437,714 \\ 0,336 \\ 0,410 \end{bmatrix}.$$

L'équation de l'hyperplan des moindres carrés est donc donnée par :

$$\hat{y}(x_1, x_2) = -437,714 + 0,336\,x_1 + 0,410\,x_2$$

Nous pouvons également calculer :

$$cm_{res} = \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} = \frac{3194}{6} = 532.$$

Nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned} s^2\left(\widehat{\beta}\right) &= cm_{res}({}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1} = 532 \begin{bmatrix} 6,304\,777 & -0,007\,800 & 0,011\,620 \\ -0,007\,800 & 0,000\,015 & -0,000\,031 \\ 0,011\,620 & -0,000\,031 & 0,000\,072 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\,355,56 & -4,152 & 6,184 \\ -4,152 & 0,008 & -0,016 \\ 6,184 & -0,016 & 0,038 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les écart-types $s\left(\widehat{\beta}_j\right)$ des estimateurs $\widehat{\beta}_j$ sont alors donnés par les racines carrées des éléments diagonaux de cette matrice. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} s\left(\widehat{\beta}_0\right) &= 57,930\,97 \\ s\left(\widehat{\beta}_1\right) &= 0,089\,66 \\ s\left(\widehat{\beta}_2\right) &= 0,196\,14 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant réaliser des tests.
Il faut donc s'intéresser à la normalité des résidus afin de savoir si les décisions que nous allons prendre sont légitimes ou non.

Nous obtenons à l'aide du logiciel `R` :

```
> shapiro.test(residuals(modele1))
Shapiro-Wilk normality test
data: residuals(modele1)
W = 0.9157, p-value = 0.3578
```

Nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ de normalité au seuil de significativité $\alpha = 5\%$. Le risque associé à cette décision est un risque de seconde espèce, β qu'il faudrait calculer en toute théorie.

Afin de tester l'hypothèse nulle :

$$\mathcal{H}_0 : \beta_j = 0$$

contre l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_1 : \beta_j \neq 0,$$

il s'agit de calculer les statistiques suivantes, pour respectivement $j = 0$, $j = 1$ et $j = 2$:

$$\begin{aligned} t_{obs} &= \frac{-437,714}{57,93097} = -7,556 \\ t_{obs} &= \frac{0,336}{0,089\,66} = 3,753 \\ t_{obs} &= \frac{0,410}{0,196\,14} = 2,090. \end{aligned}$$

Comme la valeur critique est donnée par $t_{6;0,975} = 2,447$, pour $j = 0$ et $j = 1$, nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de significativité $\alpha = 5\%$ et d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$. Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui est égal à $\alpha = 5\%$.
Par contre, pour $j = 2$, nous décidons de ne pas rejeter et donc d'accepter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de significativité $\alpha = 5\%$. Le risque associé à cette décision est un risque de seconde espèce qui est égal à β qu'il faudrait calculer en toute théorie.
Conclusion : cela veut dire que la variable X_2 n'est pas une variable significative dans le modèle.

Nous calculons **les intervalles de confiance au niveau** 95% **pour les 3 paramètres** $\beta_0, \beta_1, \beta_2$.

$$\begin{aligned} -437,714 \pm 2,447 \times 57,930\,97 &= [-579,466; -295,961] \\ 0,336 \pm 2,447 \times 0,089\,66 &= [0,117; 0,556] \\ 0,410 \pm 2,447 \times 0,196\,14 &= [-0,070; 0,890] \end{aligned}$$

Remarque : la valeur 0 est comprise dans l'intervalle de confiance pour β_2.

Calculons maintenant **le tableau d'ANOVA** pour notre exemple. Il s'agit de calculer les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{SC}_{reg} &= \widehat{\beta}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\mathbf{y} - n\overline{y}^2 \\
&= \begin{bmatrix} -437,71 & 0,336 & 0,41 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2\,530 \\ 4\,154\,500 \\ 1\,378\,500 \end{bmatrix} - 428\,152,14 \\
&= 144\,695 \\
\mathrm{SC}_{tot} &= {}^{\mathbf{t}}\mathbf{y}\mathbf{y} - n\overline{y}^2 \\
&= \begin{bmatrix} 60 & 120 & 190 & \cdots & 440 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 190 \\ . \\ . \\ . \\ 440 \end{bmatrix} - 428\,152,14 \\
&= 147\,889
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\mathrm{SC}_{res} = \mathrm{SC}_{tot} - \mathrm{SC}_{reg} = 147\,889 - 144\,695 = 3\,194.$$

Nous obtenons le tableau d'ANOVA donné par le tableau ci-dessous. Nous voulons tester l'hypothèse nulle :

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

contre l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_1 : \exists i = 1, 2 / \beta_i \neq 0.$$

Comme la statistique $F_{obs} = 135,92$ est supérieure à la valeur critique $F_{(0,95,\,2,\,6)} = 5,14$, nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de significativité $\alpha = 5\%$.

Source de variation	Somme des carrés	ddl	Carrés moyens	F_{obs}
Régression	144 695	2	72 348	135,92
Résiduelle	3 194	6	532	
Totale	147 889	8		

Bien sûr, vous pouvez retrouver tous ces résultats avec le logiciel `R`. Voici les commandes à taper :

```
> production<-c(60,120,190,250,300,360,380,430,440)
> travail<-c(1100,1200,1430,1500,1520,1620,1800,1820,1800)
> capital<-c(300,400,420,400,510,590,600,630,610)
> modele<-lm(production~travail+capital)
> modele

Call:
lm(formula = production ~ travail + capital)

Coefficients:
```

```
(Intercept)      travail      capital
  -437.7136       0.3365       0.4100
> summary(modele)

Call:
lm(formula = production ~ travail + capital)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-34.050 -10.129   4.526  17.080  21.850

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -437.71363   57.93097  -7.556 0.000279 ***
travail        0.33653    0.08966   3.753 0.009474 **
capital        0.41002    0.19614   2.090 0.081555 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 23.07 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9784,     Adjusted R-squared: 0.9712
F-statistic: 135.9 on 2 and 6 DF,  p-value: 1.007e-05
```

Avec la commande `summary`, nous avons obtenu les 3 tests de Student. Pour obtenir les 3 intervalles de confiance pour chacun des paramètres, nous allons utiliser la commande `confint`.

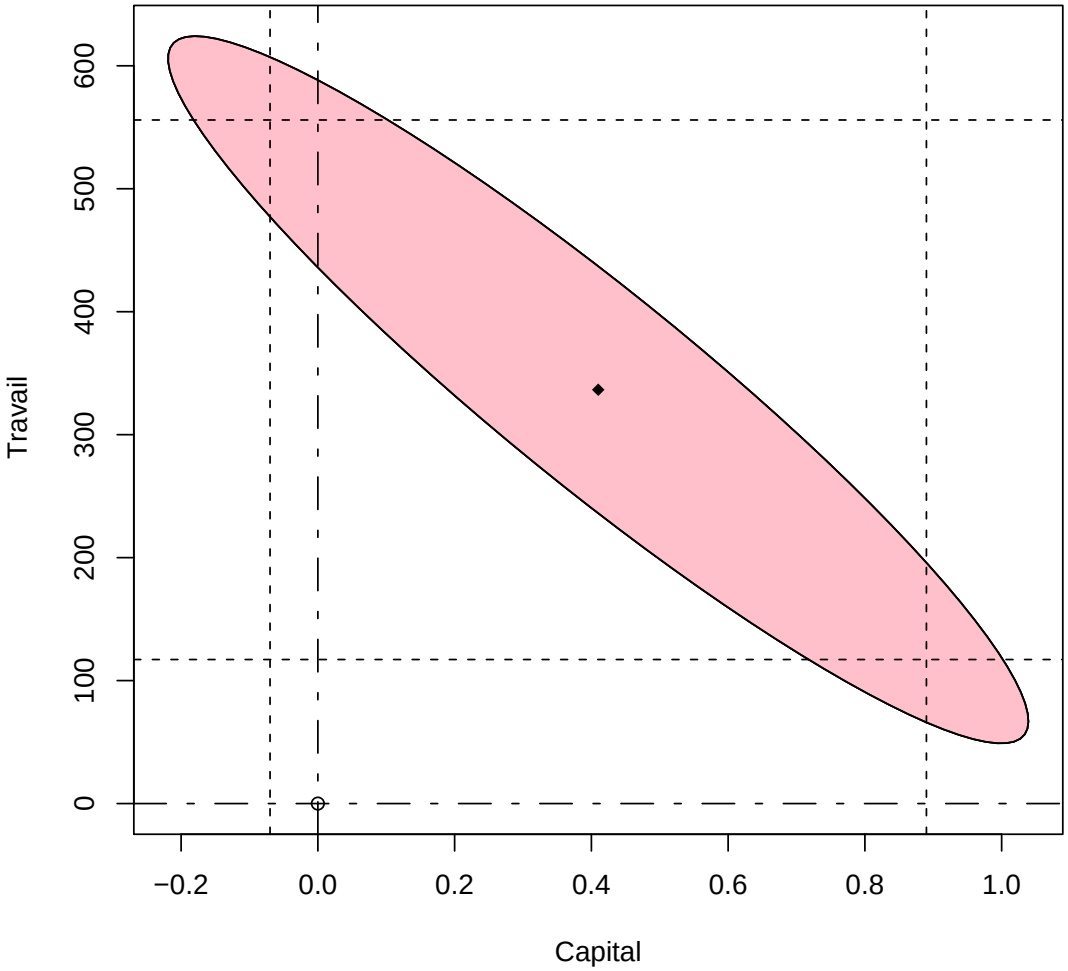
```
> confint(modele)
                    2.5 %       97.5 %
(Intercept) -579.46562195 -295.9616437
travail        0.11712905    0.5559315
capital       -0.06993004    0.8899614
```

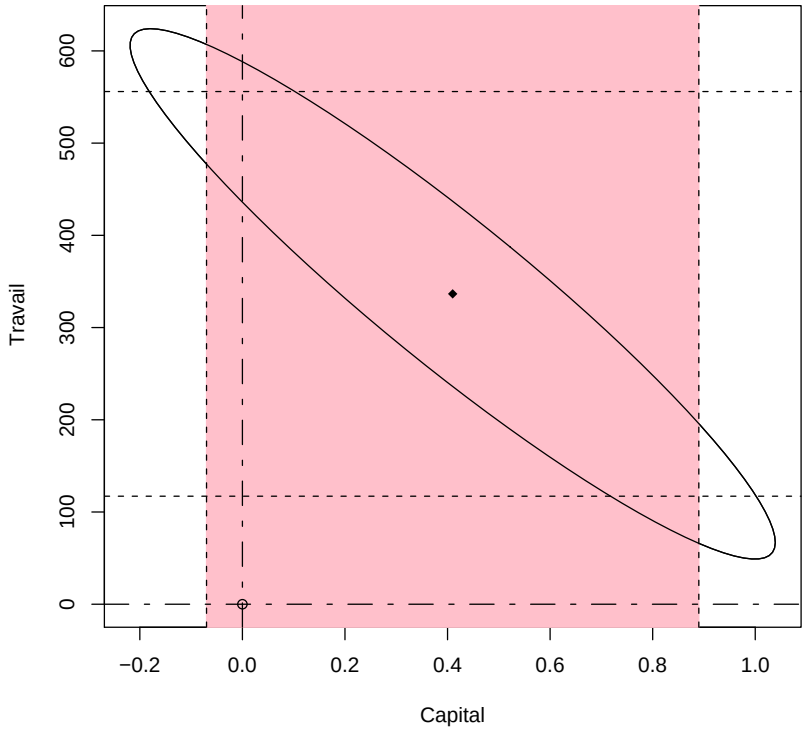
Enfin, pour obtenir le tableau de l'ANOVA, nous allons utiliser la commande `anova`

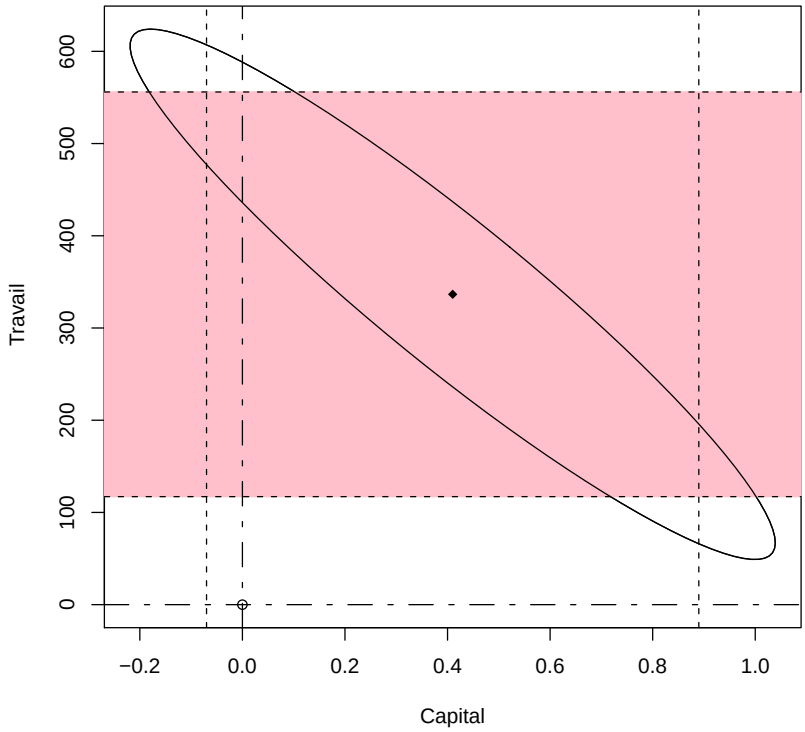
```
> anova(modele)
Analysis of Variance Table

Response: production
          Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
travail    1 142369  142369 267.4631 3.328e-06 ***
capital    1   2326    2326   4.3697   0.08155 .
Residuals  6   3194     532
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Les instructions suivantes permettent de construire des régions de confiance pour deux paramètres simultanément, c'est-à-dire une ellipse de confiance. Il est intéressant de comparer cette région de confiance simultanée avec les deux que nous obtenons en considérant chacun des paramètres séparément.

```
library(ellipse)
my.confidence.region <- function (g, a=2, b=3, which=0, col='pink') {
  e <- ellipse(g,c(a,b))
  x <- g$coef[a]
  y <- g$coef[b]
  cf <- summary(g)$coefficients
  ia <- cf[a,2]*qt(.975,g$df.residual)
  ib <- cf[b,2]*qt(.975,g$df.residual)
  xmin <- min(c(0,e[,1]))
  xmax <- max(c(0,e[,1]))
  ymin <- min(c(0,e[,2]))
  ymax <- max(c(0,e[,2]))
  plot(e,
       type="l",
       xlim=c(xmin,xmax),
       ylim=c(ymin,ymax),
      )
  if(which==1){ polygon(e,col=col) }
  else if(which==2){ rect(x-ia,par('usr')[3],x+ia,par('usr')[4],
   col=col,border=col) }
  else if(which==3){ rect(par('usr')[1],y-ib,par('usr')[2],y+ib,
   col=col,border=col) }
  lines(e)
  points(x,y,pch=18)
  abline(v=c(x+ia,x-ia),lty=2)
  abline(h=c(y+ib,y-ib),lty=2)
  points(0,0)
  abline(v=0,lty="F848")
  abline(h=0,lty="F848")
}
my.confidence.region(modele1, which=1)
my.confidence.region(modele1, which=2)
my.confidence.region(modele1, which=3)
```


Travail
0
100
200
300
400
500
600
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Capital


Travail
0
100
200
300
400
500
600
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Capital


Travail
0
100
200
300
400
500
600
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Capital