Quelques modèles d'analyse de la variance

Frédéric Bertrand et Myriam Maumy[1]

Université de Strasbourg
Institut de Recherche Mathématique Avancée[2]

12 septembre 2011

---

[1] Courriel : `fbertran@math.unistra.fr` et `mmaumy@math.unistra.fr`
[2] 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

Préface

Ce manuel de cours a pour but de vous guider dans vos réflexions pour les études statistiques que vous aurez à réaliser à l'aide de modèle d'analyse de la variance. Nous présentons un vaste paysage des modèles de l'analyse de la variance à un ou plusieurs facteurs. Ces facteurs peuvent être croisés ou hiérarchisés et à effets fixes ou aléatoires. La mise en évidence d'un effet de l'un des termes du modèle statistique est généralement suivie par l'analyse des effets comparés des modalités de ce terme et repose sur l'utilisation de procédures de comparaisons multiples. Nous avons rassemblé et détaillé la plupart des procédures qui sont utilisées dans la pratique ainsi que deux d'entre elles dont l'utilisation est recommandée par l'Encyclopédie de Statistique.

Pour chacun des modèles étudiés, nous commençons par détailler la modélisation statistique, ses conditions d'utilisation et ses limitations afin que vous puissiez être ensuite capable de l'utiliser avec pertinence. Nous proposons ensuite des exercices, le plus souvent intégralement corrigés avec le logiciel.

Les références [Dag98a], [Dag98b], [KRB96], [Fal05], [Par74], [SA00] ayant servi à l'élaboration de ce manuel sont mentionnées dans la bibliographie.

Vos remarques, vos commentaires, vos suggestions, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

`fbertran@math.unistra.fr`
`mmaumy@math.unistra.fr`

Table des matières

Préface **iii**

Table des matières **iv**

Avant-propos **xi**

1 Introduction **1**
1.1 Un peu de vocabulaire 1
1.2 Plans équilibrés, plans déséquilibrés 4
1.3 Risque global associé au tableau de l'analyse de la variance 5

2 Analyse de la variance à un facteur **7**
2.1 Modèles à effets fixes 7
2.2 Modèles à effets aléatoires 10

3 Analyse de la variance à deux facteurs **13**
3.1 Modèles à effets fixes 13
3.1.1 Sans répétition 13
3.1.2 Avec répétitions 17
3.2 Modèles à effets aléatoires 21
3.2.1 Sans répétition 21
3.2.2 Avec répétitions 24
3.3 Modèles à effets mixtes 27
3.3.1 Sans répétition 27
3.3.2 Avec répétitions 30

4 Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés **35**
4.1 Modèles à effets fixes 36
4.1.1 Avec répétitions 36
4.2 Modèles à effets aléatoires 39
4.2.1 Avec répétitions 39
4.3 Modèles à effets mixtes 42
4.3.1 Avec répétitions 42

5 Analyse de la variance à trois facteurs **47**
5.1 Modèles à effets fixes 47
5.1.1 Sans répétition 47
5.1.2 Avec répétitions 54

5.2 Modèles à effets aléatoires 62
5.2.1 Sans répétition 62
5.2.2 Avec répétitions 68
5.3 Modèles à effets mixtes 74
5.3.1 Sans répétition 74
5.3.2 Avec répétitions 84

6 Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés 97
6.1 Modèles à effets fixes 97
6.1.1 Avec répétitions 97
6.2 Modèles à effets aléatoires 103
6.2.1 Avec répétitions 103
6.3 Modèles à effets mixtes 106
6.3.1 Avec répétitions 106

7 Analyse de la variance à trois facteurs partiellement emboîtés 113
7.1 Introduction 113
7.2 Les différents modèles partiellement emboîtés 113
7.2.1 Nécessitant des répétitions 113
7.2.2 Ne nécessitant pas de répétitions 114

8 Analyse de la variance à l facteurs, $l > 2$ 117

9 Comparaisons multiples 119
9.1 Contrastes 119
9.1.1 Définition 119
9.1.2 Orthogonalité 120
9.1.3 Estimation 120
9.1.4 Test d'une hypothèse impliquant un constraste 121
9.2 Comparaisons multiples sous l'hypothèse d'homoscédasticité 122
9.2.1 La méthode de Tukey 123
9.2.2 La méthode de Tukey-Kramer 125
9.2.3 La méthode de Hochberg 126
9.2.4 La méthode de Scheffé 127
9.2.5 La méthode de la plus petite différence significative de Fisher . . . 129
9.2.6 La méthode de Bonferroni 130
9.2.7 La méthode de rejet séquentiel de Bonferroni de Holm 131
9.2.8 La méthode de Dunn-Šidák 131
9.2.9 La méthode de Newman-Keuls 132
9.2.10 La méthode de Duncan 133
9.2.11 La méthode de Dunnett 134
9.3 Comparaisons multiples sous l'hypothèse d'hétéroscédasticité 135
9.3.1 La méthode de Games et Howell 135
9.4 Deux méthodes recommandées 135
9.4.1 Le test multiple des étendues de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch 136
9.4.2 Tests F-multiples 138
9.5 Comparaisons avec le *meilleur* 139
9.5.1 La méthode de Hsu 140

9.5.2 La méthode de Edwards-Hsu . . . 140
9.6 Deux facteurs sans répétition . . . 142
9.6.1 Contrastes . . . 142
9.6.2 Méthode de Tukey . . . 143
9.6.3 Méthode de Scheffé . . . 143
9.6.4 Méthode de Bonferroni et méthodes associées . . . 144
9.7 Deux facteurs avec répétitions . . . 144
9.7.1 Contrastes . . . 145
9.7.2 Méthode de Tukey . . . 146
9.7.3 Méthode de Scheffé . . . 147
9.7.4 Méthode de Bonferroni et méthodes associées . . . 148
9.7.5 Cas d'un plan non équilibré et des comparaisons deux à deux . . . 150
9.8 Deux facteurs emboîtés . . . 150
9.8.1 Contrastes . . . 150
9.8.2 Méthode de Tukey . . . 151
9.8.3 Méthode de Scheffé . . . 152
9.8.4 Méthode de Bonferroni et méthodes associées . . . 154
9.8.5 Cas d'un plan non équilibré et des comparaisons deux à deux . . . 155

10 Puissance des tests de l'analyse de la variance **157**
10.1 Analyse de la variance à un facteur . . . 158
10.1.1 Modèle à effets fixes . . . 158
10.1.2 Modèle à effets aléatoires . . . 160
10.2 Analyse de la variance à deux facteurs sans interaction . . . 161
10.2.1 Modèle à effets fixes . . . 161
10.2.2 Modèle à effets aléatoires . . . 162
10.2.3 Modèle à effets mixtes . . . 163
10.3 Analyse de la variance à deux facteurs avec interaction . . . 164
10.3.1 Modèle à effets fixes . . . 165
10.3.2 Modèle à effets aléatoires . . . 166
10.3.3 Modèle à effets mixtes . . . 167
10.4 Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés . . . 169
10.4.1 Modèle à effets fixes . . . 169
10.4.2 Modèle à effets aléatoires . . . 170
10.4.3 Modèle à effets mixtes . . . 171
10.5 Analyse de la variance à trois facteurs sans interaction . . . 172
10.5.1 Modèle à effets fixes . . . 173
10.5.2 Modèle à effets aléatoires . . . 174
10.5.3 Modèle à effets mixtes . . . 175
10.6 Analyse de la variance à trois facteurs avec interaction . . . 179
10.6.1 Modèle à effets fixes . . . 179
10.6.2 Modèle à effets aléatoires . . . 180
10.6.3 Modèle à effets mixtes . . . 182
10.7 Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés . . . 187
10.7.1 Modèle à effets fixes . . . 188
10.7.2 Modèle à effets aléatoires . . . 189
10.7.3 Modèle à effets mixtes . . . 191

11 Exemples **195**
11.1 Analyse de la variance à un facteur 195
11.1.1 Carburateurs 195
11.2 Analyse de la variance à deux facteurs 200
11.2.1 Sans répétition 200
11.2.2 Avec répétitions et plan équilibré 209
11.2.3 Avec répétitions et plan déséquilibré 225
11.3 Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés 228
11.3.1 Plan déséquilibré 228
11.4 Analyse de la variance à trois facteurs 231
11.4.1 Sans répétition 231
11.4.2 Avec répétitions 237
11.5 Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés 246
11.6 Analyse de la variance à trois facteurs partiellement emboîtés 247

12 Modèles statistiques **249**
12.1 Introduction 249
12.2 Modèle statistique 249
12.2.1 Relations 249
12.2.2 Le cas de l'erreur 250
12.2.3 Choix d'une fonction 250
12.2.4 Synthèse 251
12.3 Un cas concret : l'analyse de la variance à un facteur contrôlé 251
12.3.1 Introduction 251
12.3.2 Modèle statistique 252
12.3.3 Les hypothèses 252

13 Estimation **257**
13.1 Définitions et notations 257
13.1.1 Population, individu, échantillon 257
13.1.2 Caractères quantitatif et qualitatif 257
13.1.3 Caractères discret et continu 258
13.2 Paramètres de position 258
13.2.1 Le mode 258
13.2.2 La moyenne 259
13.3 Paramètres de dispersion 259
13.3.1 L'étendue 259
13.3.2 La variance 259
13.3.3 L'écart-type 260
13.4 La théorie de l'estimation 260
13.4.1 Introduction 260
13.4.2 Quelques définitions 261
13.4.3 Simplification de notation 261
13.4.4 Propriétés d'un estimateur 261
13.4.5 Précision : Cas d'un estimateur sans biais 262
13.4.6 Précision : Cas d'un estimateur quelconque 262
13.5 Des exemples d'estimation 263

13.5.1 Estimation de la moyenne d'une population 263
13.5.2 Estimation de la variance d'une population 264
13.5.3 Estimation d'une proportion d'une population 265

Liste des figures **265**

Liste des tableaux **265**

Bibliographie **266**

Avant-propos

Notations

Nous commençons par quelques notations, couramment utilisées en statistique, à la fois pour alléger les formules et pour les rendre plus compréhensibles.

La notation synthétique d'un total : application aux effectifs

Nous considérons un tableau de données provenant de résultats expérimentaux effectués dans certaines conditions symbolisées par un ou plusieurs indices. Ces expériences peuvent être répétées ou non en fonction des indices que nous considérons, chacune des cases du tableau comportant ainsi une ou plusieurs données. Nous notons l'effectif de chaque case du tableau en remplaçant y par n et en conservant les indices associés à y. La somme des effectifs suivant l'un des indices est notée en remplaçant cet indice par le symbole $+$. Nous adoptons cette notation, classique en statistique, pour alléger et uniformiser les notations. Ainsi par exemple, dans les cas où nos données sont indexées par un, deux ou trois indices, nous obtenons les notations ci-dessous.

1. Nous avons observé n valeurs de la variable Y. Chacune d'entre elle correspond à un résultat expérimental effectué dans la condition i, $1 \leqslant i \leqslant I$. Nous construisons donc un tableau comportant I lignes. L'effectif de chaque case du tableau est alors noté n_i, l'effectif total n_+ est évidemment donné par la formule :

$$n_+ = \sum_{i=1}^{I} n_i.$$

   Bien entendu nous avons $n_+ = n$.

2. Nous avons observé n valeurs de la variable Y que nous regroupons en fonction des valeurs des deux indices i, $1 \leqslant i \leqslant I$, et j, $1 \leqslant j \leqslant J$, associés aux conditions expérimentales. Nous construisons ainsi un tableau à I lignes et J colonnes.
   - L'effectif de la case (i, j) du tableau, située à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne est alors noté $n_{i,j}$.
   - La somme des effectifs par rapport à l'indice i, c'est-à-dire le nombre de données dans la colonne j du tableau, est notée $n_{+,j}$.

$$n_{+,j} = \sum_{i=1}^{I} n_{i,j}.$$

- La somme des effectifs par rapport à l'indice j, c'est-à-dire le nombre de données dans la ligne i du tableau, est notée $n_{i,+}$.

  $$n_{i,+} = \sum_{j=1}^{J} n_{i,j}.$$

- La somme des effectifs par rapport aux indices i et j, c'est-à-dire le nombre de données dans le tableau, est notée $n_{+,+}$.

  $$n_{+,+} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{i,j}.$$

  Bien entendu nous avons $n_{+,+} = n$.

2. Nous avons observé n valeurs de la variable Y que nous regroupons en fonction des valeurs des trois indices i, $1 \leqslant i \leqslant I$, j, $1 \leqslant j \leqslant J$, et k, $1 \leqslant k \leqslant K$, associés aux conditions expérimentales. Nous construisons ainsi un multitableau à I lignes, J colonnes et une profondeur de K.
   - L'effectif de la case (i, j, k) du multitableau, située à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne à la profondeur k est alors noté $n_{i,j,k}$.
   - La somme des effectifs par rapport à l'indice i, c'est-à-dire le nombre de données dans la colonne j à la profondeur k du multitableau, est notée $n_{+,j,k}$.

     $$n_{+,j,k} = \sum_{i=1}^{I} n_{i,j,k}.$$

   - La somme des effectifs par rapport à l'indice j, c'est-à-dire le nombre de données dans la ligne i à la profondeur k du multitableau, est notée $n_{i,+,k}$.

     $$n_{i,+,k} = \sum_{j=1}^{J} n_{i,j,k}.$$

   - La somme des effectifs par rapport à l'indice i, c'est-à-dire le nombre de données dans les cases transversales, c'est-à-dire sur toute la profondeur du tableau, situées aux intersections de la ligne i et de la colonne j du multitableau, est notée $n_{i,j,+}$.

     $$n_{i,j,+} = \sum_{k=1}^{K} n_{i,j,k}.$$

   - La somme des effectifs par rapport aux indices i et j, c'est-à-dire le nombre de données dans la tranche de profondeur k du multitableau, est notée $n_{+,+,k}$.

     $$n_{+,+,k} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{i,j,k}.$$

   - La somme des effectifs par rapport aux indices i et k, c'est-à-dire le nombre de données dans la tranche verticale de position j du multitableau, est notée $n_{+,j,+}$.

     $$n_{+,j,+} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} n_{i,j,k}.$$

- La somme des effectifs par rapport aux indices j et k, c'est-à-dire le nombre de données dans la tranche horizontale de position i du multitableau, est notée $n_{i,+,+}$.

  $$n_{i,+,+} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{i,j,k}.$$

- La somme des effectifs par rapport aux indices i, j et k, c'est-à-dire le nombre de données dans le tableau, est notée $n_{+,+,+}$.

  $$n_{+,+,+} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} n_{i,j}.$$

  Bien entendu nous avons $n_{+,+,+} = n$.

Nous pouvons bien sûr généraliser cette notation lorsque nous considérons plus de trois indices.

La notation synthétique d'une moyenne

Lorsque nous disposons d'un tableau de données indexées par un ou plusieurs indices nous notons la moyenne par rapport à l'un de ces indices en le remplaçant par le symbole $\bullet$. Nous adoptons cette notation, classique en statistique, pour alléger et uniformiser les notations. Ainsi par exemple, dans les cas où nos données sont indexées par un, deux ou trois indices, nous obtenons les notations ci-dessous.

1. Nous avons observé $n = I$ valeurs de la variable Y indexée par un indice i, notées $y_1, \ldots, y_n$. La moyenne de ces valeurs $y_1, \ldots, y_n$ par rapport à l'indice i est donc notée $y_\bullet$. Dans ce cas il s'agit simplement de la moyenne $\overline{y}$:

   $$y_\bullet = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} y_i = \frac{1}{I} y_+.$$

2. Nous avons observé $n = I \times J$ valeurs de la variable Y indexée par deux indices i et j, notées $y_{1,1}, \ldots, y_{1,J}$, $y_{2,1}, \ldots, y_{2,J}$,. . .,$y_{I,J}, \ldots, y_{I,J}$.
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1}, \ldots, y_{I,J}$ par rapport à l'indice i est notée $y_{\bullet,j}$. Il s'agit simplement de la moyenne $\overline{y_j}$ des valeurs de la $j-$ème colonne du tableau :

     $$y_{\bullet,j} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} y_{i,j} = \frac{1}{I} y_{+,j}.$$

   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1}, \ldots, y_{I,J}$ par rapport à l'indice j est notée $y_{i,\bullet}$. Il s'agit simplement de la moyenne $\overline{y_i}$ des valeurs de la $i-$ème ligne :

     $$y_{i,\bullet} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} y_{i,j} = \frac{1}{J} y_{i,+}.$$

   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1}, \ldots, y_{I,J}$ par rapport aux indices i et j est notée $y_{\bullet,\bullet}$. Il s'agit simplement de la moyenne $\overline{y}$, parfois aussi appelée grande moyenne du tableau :

     $$y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{i,j} = \frac{1}{IJ} y_{+,+}.$$

3. Nous avons observé $n = I \times J \times K$ valeurs de la variable Y indexée par trois indices i, j et k, notées $y_{1,1,1}, \ldots, y_{1,1,K}$, $y_{2,1,1}, \ldots, y_{2,1,K}$, $\ldots$,$y_{I,1,1}, \ldots, y_{I,1,K}, \ldots, y_{1,2,1}, \ldots$, $y_{1,2,K}, \ldots$, $y_{I,J,1}, \ldots, y_{I,J,K}$.
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport à l'indice i est notée $y_{\bullet,j,k}$:
   $$y_{\bullet,j,k} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} y_{i,j,k} = \frac{1}{I} y_{+,j,k}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport à l'indice j est notée $y_{i,\bullet,k}$:
   $$y_{i,\bullet,k} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} y_{i,j,k} = \frac{1}{J} y_{i,+,k}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport à l'indice k est notée $y_{i,j,\bullet}$:
   $$y_{i,j,\bullet} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y_{i,j,k} = \frac{1}{K} y_{i,j,+}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport aux indices i et j est notée $y_{\bullet,\bullet,k}$:
   $$y_{\bullet,\bullet,k} = \frac{1}{IJ}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{i,j,k} = \frac{1}{IJ} y_{+,+,k}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport aux indices i et k est notée $y_{\bullet,j,\bullet}$:
   $$y_{\bullet,j,\bullet} = \frac{1}{IK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} y_{i,j,k} = \frac{1}{IK} y_{+,j,+}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport aux indices j et k est notée $y_{i,\bullet,\bullet}$:
   $$y_{i,\bullet,\bullet} = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{i,j,k} = \frac{1}{JK} y_{i,+,+}.$$
   - La moyenne de ces valeurs $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,J,K}$ par rapport aux indices i, j et k, est notée $y_{\bullet,\bullet,\bullet}$. Il s'agit simplement de la moyenne $\overline{y}$, parfois aussi appelée grande moyenne du tableau :
   $$y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{i,j,k} = \frac{1}{IJK} y_{+,+,+}.$$

Nous étendons cette notation à la situation où les valeurs que la variable Y va prendre ne sont pas encore connues, c'est-à-dire lorsque nous remplaçons les nombres y_i, $y_{i,j}$ ou $y_{i,j,k}$ par les variables aléatoires Y_i, $Y_{i,j}$ ou $Y_{i,j,k}$. Ceci permettra d'obtenir des formules simples pour les estimateurs des paramètres des modèles étudiés par la suite.

Nous pouvons bien sûr généraliser cette notation lorsque les valeurs prises par la variable Y dépendent de plus de trois indices.

Chapitre 1

Introduction

1.1. Un peu de vocabulaire

i. Nous appelons **réponse** une variable dont nous cherchons à comprendre le comportement. Nous considérerons dans le cadre de ce cours des réponses quantitatives continues. Une réponse est généralement notée Y et c'est le cas systématiquement dans la suite.

ii. Nous appelons **facteur** toute variable dont nous voulons nous servir pour analyser les variations de la réponse. Nous notons généralement les facteurs par des lettres romaines majuscules A, B, ... Dans le contexte de l'analyse de la variance tous les facteurs sont considérés comme des variables qualitatives. Les niveaux ou modalités d'un facteur sont notés en indiçant la majuscule romaine associée au facteur : A_1, $\ldots$, A_I où I désigne le nombre total de modalités du facteur A. Pour l'analyse d'une réponse à l'aide de variables quantitatives nous utiliserons des techniques de régression, linéaire ou non, et pour l'analyse d'une réponse à l'aide d'un mélange de variables quantitatives et qualitatives nous pourrons nous servir de l'analyse de la covariance.

iii. Un **modèle statistique** est une équation reliant les différentes mesures $Y_{i,j,\ldots}$ de la réponse Y aux effets des niveaux $A_1, \ldots, A_I$, $B_1, \ldots, B_J$, $\ldots$ des facteurs A, B, $\ldots$ pour lesquels ont été réalisés ces différentes mesures au travers d'une relation fonctionnelle f et tout en modélisant les fluctuations expérimentales à l'aide de variables aléatoires d'erreur généralement notée $\epsilon_{i,j,\ldots}$ sur lesquelles nous faisons porter certaines hypothèses :

$$Y_{i,j,\ldots} = f(A_i, B_j, \ldots) + \epsilon_{i,j,\ldots}.$$

iv. Les modèles associés à l'analyse de la variance ont une forme particulière : ce sont des modèles linéaires. Dans le cas la relation fonctionnelle f s'écrit simplement comme une somme de différents **termes**. Ainsi nous souhaitons par exemple étudier une réponse continue Y à l'aide d'un facteur qualitatif A à effets fixes, un nombre identique J de répétitions ayant été effectuées pour chacun des niveaux du facteur.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,$$
$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition A_i lors de la $j-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I, \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J.$$

Les μ, α_1, ..., α_I sont donc des **termes du modèle**. $\epsilon_{i,j}$ est parfois appelé le terme d'erreur dans le modèle.
Nous remarquons que les hypothèses faites sur les termes d'erreur $\epsilon_{i,j}$ font partie intégrante de la définiton du modèle. Ceci explique le soin particulier que nous devons avoir pour **vérifier que les conditions d'utilisation des modèles sont bien remplies**, la **validité des conclusions obtenues** à l'aide du modèle dépendant fortement de son utilisation opportune ou non.

v. En fonction du type d'effet auquel les termes du modèle sont associés, ces termes ont un nom différent.

- Un terme associé à l'effet direct d'un des facteurs du modèle est appelé **effet principal**, nous le notons généralement par la lettre grecque minuscule associée à la majuscule romaine désignant le facteur, par exemple pour le facteur A nous noterons α_i l'effet du niveau A_i, pour $1 \leqslant i \leqslant I$.
- L'ensemble des termes associés aux effets de l'interaction de deux des facteurs du modèle est appelé **interaction d'ordre 1**. Nous les notons généralement par les lettres grecques minuscules mises entre parenthèses associées aux majuscules romaines désignant les deux facteurs dont nous étudions l'interaction et indicées par les niveaux des deux facteurs. Par exemple si l'interaction d'ordre 2 met en jeu les facteurs A et B, nous notons les termes associés à ces effets par $(\alpha\beta)_{1,1}$, $(\alpha\beta)_{1,2}$, ..., $(\alpha\beta)_{1,I}$, $\ldots (\alpha\beta)_{2,1}$, $\ldots (\alpha\beta)_{i,j}$, $\ldots (\alpha\beta)_{I,J}$ pour $1 \leqslant i \leqslant I$ et $1 \leqslant j \leqslant J$.
- Plus généralement l'ensemble des termes associés aux effets de l'interaction de k des facteurs du modèle, $k \geqslant 2$, est appelé **interaction d'ordre $\boldsymbol{k-1}$**. Nous les notons généralement par les lettres grecques minuscules mises entre parenthèses associées aux majuscules romaines désignant les k facteurs dont nous étudions l'interaction et indicées par les niveaux de ces k facteurs. Par exemple $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$ pour l'interaction d'ordre $k-1$ entre les facteurs A, B et C.
  Ainsi nous souhaitons par exemple étudier une réponse continue Y à l'aide de trois facteurs qualitatifs à effets fixes A, B et C pour lesquels nous avons fait un nombre de répétitions identiques, noté K, pour chaque combinaison des niveaux des trois facteurs. Le facteur A a I modalités, le facteur B a J modalités et le facteur C a K modalités.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} + \epsilon_{i,j,k,l}, \\
i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L, \\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{K} \gamma_k = 0, \\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\}, \\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\}, \\
\sum_{j=1}^{J} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\}, \\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (j,k) \in \{1, \ldots, J\} \times \{1, \ldots, K\}, \\
\sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (i,k) \in \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, K\}, \\
\sum_{k=1}^{K} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, J\},
\end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition (A_i, B_j, C_k) lors de la $l-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}
\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\
\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p) \\
\text{avec } 1 \leqslant i, m \leqslant I,\ 1 \leqslant j, n \leqslant J,\ 1 \leqslant k, o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l, p \leqslant L.
\end{gathered}$$

Les termes α_i, β_j et γ_k sont donc les **effets principaux** associés aux trois facteurs A, B et C. Les termes $(\alpha\beta)_{i,j}$ sont associés aux **interactions d'ordre 2** entre les facteurs A et B, les termes $(\alpha\gamma)_{i,k}$ sont associés aux **interactions d'ordre 2** entre les facteurs A et C, les termes $(\beta\gamma)_{j,k}$ sont associés aux **interactions d'ordre 2** entre les facteurs B et C, les termes $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$ sont associés à **l'interaction d'ordre 3** entre les facteurs A, B et C.
Nous remarquons qu'à nouveau les hypothèses faites sur les termes d'erreur $\epsilon_{i,j,k,l}$ font partie intégrante de la définiton du modèle. Ceci explique le soin particulier que nous devons avoir pour **vérifier que les conditions d'utilisation des modèles sont bien remplies**, **la validité des conclusions obtenues** à l'aide du modèle dépendant fortement de son utilisation opportune ou non.

- Dans certaines situations particulières, celles où **l'un ou plusieurs des facteurs sont dits emboîtés dans un autre facteur**, nous introduirons d'autres notations qui seront décrites à la section 4 et à la section 6.

1.2. Plans équilibrés, plans déséquilibrés

De manière générale, tout dispositif expérimental comportant au moins un facteur et comportant un nombre identique de répétitions dans chacune des modalités des facteurs est un plan équilibré. Dans la suite nous appelerons plan équilibré tout plan vérifiant cette condition.[1]

Pour de multiples raisons nous conseillons, lors de la phase de planification expérimentale, de prévoir d'utiliser des plans équilibrés pour l'analyse des effets ou des interactions d'un ou plusieurs facteurs qualitatifs sur une réponse expérimentale modélisée par une variable continue. En particulier dans le cas où le plan est équilibré :

1. Les estimations des paramètres d'un modèle où les facteurs sont à effets fixes seront faciles à calculer puisque nous sommes dans une situation dénommée en statistique par plan d'expérience orthogonal. Concrètement ceci signifie que pour estimer l'effet d'un des termes du modèle, il n'est pas nécessaire d'estimer les effets des autres termes du modèle. Ceci se traduit dans les formules par le fait que l'estimation des effets des termes du modèle se fait comme si le modèle ne comportait pas d'autres termes que celui que nous cherchons à estimer.
2. Lorsque nous ne disposons d'aucune information a priori sur les possibles résultats de l'expérience, la situation la plus propice à mettre en évidence une différence, si elle existe, entre les différents effets pour lesquels des tests sont réalisés est associée à une répartition des essais où le plan est équilibré. Nous renvoyons au chapitre 10 pour un exposé plus détaillé du calcul de la puissance associée aux différents tests réalisés lors d'une analyse de la variance.

Néanmoins il est possible d'utiliser tous les modèles exposés dans les chapitres suivants dans le contexte particulier des plans équilibrés lorsqu'en fait le plan est déséquilibré, c'est-à-dire lorsque le nombre de répétitions varie d'une case à l'autre du tableau de données. **En aucun cas il n'est légitime de supprimer des observations pour se ramener à une situation où le plan est équilibré.** Il y a deux faits qu'il faut absolument avoir à l'esprit lorsque nous nous servons de ce type de modèles, donc pour lesquels le plan est déséquilibré.

1. D'une part, l'estimation des effets des différents niveaux des facteurs ou de leurs interactions n'est plus aussi simple que précédemment,sauf dans le cas d'un modèle d'analyse de la variance à un facteur ou lorsque le plan est dit à effectifs proportionnels. En effet, ces estimations ne sont plus indépendantes les unes des autres. Voir

---

[1] Cette condition est plus restrictive que celle que nous pouvons définir plus généralement en statistique pour étudier des modèles d'analyse de la variance. Nous pouvons aussi facilement traiter le cas où le plan est déséquilibré mais à effectifs proportionnels. Par exemple, dans le cas où nous considérons deux facteurs, un dispositif expérimental déséquilibré à effectifs proportionnels est tel que :

$$n_{i,j} = \frac{n_{i,+} \times n_{+,j}}{n_{+,+}},$$

où les notattions $n_{i,j}$, $n_{i,+}$, $n_{+,j}$ et $n_{+,+}$ ont été définies au paragraphe . Cette notion se généralise directement au cas où le plan comporte k facteurs avec $k \geqslant 2$.

par exemple la situation étudiée dans le paragraphe 11.2.3 où nous insistons sur les différences qui découlent de cette situation. Nous renvoyons à [Dag98b] pour plus de détails.

2. D'autre part, les lois des statistiques de test que nous utilisons pour tester les différentes hypothèses présentes dans le tableau de l'analyse de la variance ne sont, dans la majorité des cas, connues qu'approximativement. Nous renvoyons à nouveau à [Dag98b] pour plus de détails.

Dans la suite, nous nous bornerons à exposer la théorie de l'analyse de la variance dans le cadre des plans équilibrés, c'est-à-dire dans le cas où le nombre de répétitions est constant d'une case à l'autre du tableau.

1.3. Risque global associé au tableau de l'analyse de la variance

Lorsque nous réalisons une étude de la significativité des effets de deux ou de plus de facteurs, en s'intéressant ou non à la significativité de leurs interactions, avec un modèle d'analyse de la variance, le tableau de l'analyse de la variance que nous étudions permet de prendre plusieurs décisions, chacune associée au test d'une hypothèse nulle. Nous prenons ainsi en fait plusieurs décisions chacune d'entre elles étant associées à un risque de première ou de seconde espèce. Pour plus de détails sur les méthodes de gestion du risque de première espèce associée à la lecture de tableaux récapitulatifs de tests statistiques voir le chapitre de cours consacré à ce problème.

Exemple 1.3.1. Analyse de la variance à deux facteurs à effets fixes, aléatoires ou mixtes et avec répétitions

Pour un exposé complet du modèle d'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés avec répétitions voir le paragraphe 3.1.2.
Avec un tel modèle il est possible de tester trois hypothèses nulles, $\mathcal{H}_0^{'}$ d'absence d'effet du premier facteur, $\mathcal{H}_0^{''}$ d'absence d'effet du second facteur, $\mathcal{H}_0^{'''}$ d'absence d'effet de l'interaction des deux facteurs. Chacune d'elles peut être testée avec un risque différent, $\alpha^{'}$, $\alpha^{''}$ et $\alpha^{'''}$. Le risque global α vérifiera alors la relation :

$$\alpha \leqslant 1-(1-\alpha^{'})(1-\alpha^{''})(1-\alpha^{'''}) \leqslant \alpha^{'}+\alpha^{''}+\alpha^{'''}.$$

La dernière inégalité est une application de **l'inégalité de Bonferroni**. Ainsi si nous voulons prendre une décision associée à un risque global de $\alpha = 5$ %, nous pourrons fixer un seuil individuel de $\alpha^{'}=\alpha^{''}=\alpha^{'''}=5/3\ \% \approx 1,67\ \%$ pour chacun des tests élémentaires de chaque hypothèse $\mathcal{H}_0^{'}$, $\mathcal{H}_0^{''}$ et $\mathcal{H}_0^{'''}$.

L'exemple précédent met en évidence le fait que, plus le tableau de l'analyse de la variance étudié comporte de tests, plus la correction à apporter au niveau individuel de significativité de chacun des tests réalisés sera importante. Cette correction vise à réduire le nombre de faux positifs, effets jugés à tort comme significatifs, que nous avons détectés. Elle est d'autant plus intéressante à faire que le nombre de tests réalisés est important.

Remarque 1.3.1. La nécessité de l'utilisation de ce type de correction dépend de la formulation des résultats qui est faite par l'utilisateur. Si celui-ci s'intéresse à un risque global portant sur l'ensemble des décisions prises à l'aide d'un modèle d'analyse de la variance il privilégiera une maîrise du risque global. Si l'utilisateur s'intéresse au risque associé à chacune des décisions, il maîtrisera le risque individuel associé à chacune d'entre elles. Quoi qu'il advienne il faut savoir que nous entrons dans le domaine de l'analyse de tableaux de résultats. Nous pourrons consulter [Par74] ou [Ric89] pour plus de précisions.

Chapitre 2

Analyse de la variance à un facteur

Dans tout ce chapitre, nous utilisons les notations définies à la section Notations, page xi..

2.1. Modèles à effets fixes

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Pour chacune des modalités nous effectuons $J \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \dots I,\ j = 1 \dots J,$$
$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition A_i lors de la $j-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I,\ \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.
Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans la condition A_i lors des J répétitions dans le tableau suivant :

Facteur A	Y
A_1	$Y_{1,1}, \dots, Y_{1,J}$
$\vdots$	$\vdots$
A_i	$Y_{i,1}, \dots, Y_{i,J}$
$\vdots$	$\vdots$
A_I	$Y_{I,1}, \dots, Y_{I,J}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_F = J \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet})^2 \right).$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_F + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1}, \ldots, y_{1,J}, \ldots, y_{2,1}, \ldots, y_{2,J}, \ldots, y_{I,J}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

Facteur A	$\boldsymbol{y}$
A_1	$y_{1,1}, \ldots, y_{1,J}$
$\vdots$	$\vdots$
A_i	$y_{i,1}, \ldots, y_{i,J}$
$\vdots$	$\vdots$
A_I	$y_{I,1}, \ldots, y_{I,J}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_F = J \sum_{i=1}^{I} (y_{i,\bullet} - y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{J} (y_{i,j} - y_{i,\bullet})^2 \right).$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (y_{i,j} - y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_F + sc_R.$$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Degrés de liberté	Carré Moyen	F	Décision
Facteur	sc_F	$I-1$	$s_F^2 = \dfrac{sc_F}{I-1}$	$f = \dfrac{s_F^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0$ ou $\mathcal{H}_1$
Résiduelle	sc_R	$n-I = I(J-1)$	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n-I}$		
Totale	sc_{TOT}	$n-1 = IJ-1$			

Nous souhaitons faire le test d'hypothèse suivant :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $n-I$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet} = \overline{Y}, \ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet} - \widehat{\mu}, \ 1 \leqslant i \leqslant I,$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{n-I} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{i,j} - Y_{i,\bullet})^2}{n-I} = S_R^2.$$

Ce sont des estimateurs sans biais[1].

---

[1] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{gathered}\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\ \widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{n-I} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j}-y_{i,\bullet})^2}{n-I} = s_R^2.\end{gathered}$$

2.2. Modèles à effets aléatoires

Dans ce cas les A_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Le modèle ne dépend plus que de trois paramètres μ, σ^2 et σ_A^2. Pour chacune des modalités nous effectuons $J \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition A_i lors de la $j-$ème répétition. Nous supposons que :

$$\mathcal{L}\left(\alpha_i\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\mathrm{Cov}(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i, j \leqslant I.$$

Nous postulons les hypothèses supplémentaires pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),\\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I,\ \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\mathrm{Cov}(\alpha_i, \epsilon_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i,j \leqslant I,\ \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant J.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.
Nous utilisons les quantités SC_F, SC_R, SC_{TOT}, sc_F, sc_R, sc_{TOT} introduites à la section 2.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_F + SC_R.$$

Nous résumons les informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Degrés de liberté	Carré Moyen	F	Décision
Facteur	sc_F	$I-1$	$s_F^2 = \dfrac{sc_F}{I-1}$	$f = \dfrac{s_F^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0$ ou $\mathcal{H}_1$
Résiduelle	sc_R	$n-I = I(J-1)$	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n-I}$		
Totale	sc_{TOT}	$n-1 = IJ-1$			

Nous souhaitons faire le test d'hypothèse suivant :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $n-I$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\sigma_A^2} = \frac{1}{J}\left(S_F^2 - S_R^2\right),\ \widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{n-I} = S_R^2,$$

où $S_F^2 = \dfrac{SC_F}{I-1}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n-I}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[2].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, σ_A^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{J}\left(s_F^2 - s_R^2\right),\ \widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{n-I} = s_R^2.$$

---

[2] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Chapitre 3

Analyse de la variance à deux facteurs

Dans tout ce chapitre, nous utilisons les notations définies à la section Notations, page xi..

3.1. Modèles à effets fixes

3.1.1. Sans répétition

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered} Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \dots I,\ j = 1 \dots J, \\ \text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0, \end{gathered}$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j). Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered} \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J. \end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) dans le tableau suivant :

Facteur A	Facteur B				
	B_1	$\dots$	B_j	$\dots$	B_J
A_1	$Y_{1,1}$	$\dots$	$Y_{1,j}$	$\dots$	$Y_{1,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$Y_{i,1}$	$\dots$	$Y_{i,j}$	$\dots$	$Y_{i,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	$Y_{I,1}$	$\dots$	$Y_{1,j}$	$\dots$	$Y_{I,J}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = J\sum_{i=1}^{I}(Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur B est définie par :

$$SC_B = I\sum_{j=1}^{J}(Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1}, \dots, y_{1,J}, \dots, y_{2,1}, \dots, y_{2,J}, \dots, y_{I,J}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

Facteur A	Facteur B				
	B_1	$\dots$	B_j	$\dots$	B_J
A_1	$y_{1,1}$	$\dots$	$y_{1,j}$	$\dots$	$y_{1,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$y_{i,1}$	$\dots$	$y_{i,j}$	$\dots$	$y_{i,J}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	$y_{I,1}$	$\dots$	$y_{I,j}$	$\dots$	$y_{I,J}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = J\sum_{i=1}^{I}(y_{i,\bullet} - y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_B = I\sum_{j=1}^{J}(y_{\bullet,j} - y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j} - y_{i,\bullet} - y_{\bullet,j} + y_{\bullet,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j} - y_{\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJ - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}$, …, $\widehat{\beta_J}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, β_1, …, β_J, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[1].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, …, α_I, β_1, …, β_J, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

3.1.2. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0,\\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\},
\end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) lors du $k-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}
\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),\\
\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}\\
1 \leqslant i, l \leqslant I,\ 1 \leqslant j, m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k, n \leqslant K.
\end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) lors des K répétitions dans le tableau suivant :

---

[1] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Facteur A	Facteur B				
	B_1	$\ldots$	B_j	$\ldots$	B_J
A_1	$Y_{1,1,1} \ldots Y_{1,1,K}$	$\ldots$	$Y_{1,j,1} \ldots Y_{1,j,K}$	$\ldots$	$Y_{1,J,1} \ldots Y_{1,J,K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$Y_{i,1,1} \ldots Y_{i,1,K}$	$\ldots$	$Y_{i,j,1} \ldots Y_{i,j,K}$	$\ldots$	$Y_{i,J,1} \ldots Y_{i,J,K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	$Y_{I,1,1} \ldots Y_{I,1,K}$	$\ldots$	$Y_{I,j,1} \ldots Y_{I,j,K}$	$\ldots$	$Y_{I,J,1} \ldots Y_{I,J,K}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = JK \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur B est définie par :

$$SC_B = IK \sum_{j=1}^{J} (Y_{\bullet,j,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs A et B est définie par :

$$SC_{AB} = K \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{i,j,k} - Y_{i,j,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{i,j,k} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1,1}, \ldots, y_{1,1,K}, \ldots, y_{1,2,1}, \ldots, y_{1,2,K}, \ldots, y_{I,J,K}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

Facteur A	Facteur B				
	B_1	$\ldots$	B_j	$\ldots$	B_J
A_1	$y_{1,1,1} \cdots y_{1,1,K}$	$\ldots$	$y_{1,j,1} \cdots y_{1,j,K}$	$\ldots$	$y_{1,J,1} \cdots y_{1,J,K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$y_{i,1,1} \cdots y_{i,1,K}$	$\ldots$	$y_{i,j,1} \cdots y_{i,j,K}$	$\ldots$	$y_{i,J,1} \cdots y_{i,J,K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	$y_{I,1,1} \cdots y_{I,1,K}$	$\ldots$	$y_{I,j,1} \cdots y_{I,j,K}$	$\ldots$	$y_{I,J,1} \cdots y_{I,J,K}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = JK\sum_{i=1}^{I}(y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_B = IK\sum_{j=1}^{J}(y_{\bullet,j,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs A et B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{AB} = K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,j,k} - y_{i,j,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,j,k} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_{AB} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Résiduelle	$n_R = IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Interaction	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'''$ ou $\mathcal{H}_1'''$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1' : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0'' : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1'' : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0''$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0''$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0''' : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1''' : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}, \ldots, \widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}, \ldots, \widehat{\beta_J}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,2}}, \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{1,J}}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{2,1}}, \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$, $\beta_1, \ldots, \beta_J$, $(\alpha\beta)_{1,1}$, $(\alpha\beta)_{1,2}, \ldots, (\alpha\beta)_{1,J}$, $(\alpha\beta)_{2,1}, \ldots, (\alpha\beta)_{I,J}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}} = Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJ(K-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[2].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,2}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{1,J}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta)_{2,1}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$, $\beta_1, \ldots, \beta_J$, $(\alpha\beta)_{1,1}$, $(\alpha\beta)_{1,2}, \ldots, (\alpha\beta)_{1,J}$, $(\alpha\beta)_{2,1}, \ldots, (\alpha\beta)_{I,J}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJ(K-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

3.2. Modèles à effets aléatoires

3.2.1. Sans répétition

Dans ce cas les A_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

---

[2] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j). Nous supposons que :

$$\mathcal{L}\,(\alpha_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I,$$
$$\mathcal{L}\,(\beta_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\mathrm{Cov}(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i, j \leqslant I, \quad \mathrm{Cov}(\beta_i, \beta_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i, j \leqslant J,$$
$$\mathrm{Cov}(\alpha_i, \beta_j) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant J.$$

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i, j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i, j) \neq (k, l) \text{ avec } 1 \leqslant i, k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j, l \leqslant J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\mathrm{Cov}(\alpha_i, \epsilon_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i, j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant J,$$
$$\mathrm{Cov}(\beta_i, \epsilon_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant i, k \leqslant J.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, sc_B, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 3.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Résiduelle	$n_R = (I - 1)(J - 1)$
Totale	$n_{TOT} = IJ - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma_B^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\sigma_A^2} = \frac{1}{J}\left(S_A^2 - S_R^2\right),\ \widehat{\sigma_B^2} = \frac{1}{I}\left(S_B^2 - S_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S_R^2,
\end{aligned}$$

où $S_A^2 = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S_B^2 = \dfrac{SC_B}{n_B}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[3].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-desses :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{J}\left(s_A^2 - s_R^2\right),\ \widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{I}\left(s_B^2 - s_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

3.2.2. Avec répétitions

Dans ce cas les A_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1\ldots I,\ j = 1\ldots J,\ k = 1\ldots K,$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) lors du $k-$ème essai. Nous supposons que

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}\left(\alpha_i\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I,\\
\mathcal{L}\left(\beta_j\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\mathcal{L}\left((\alpha\beta)_{i,j}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,
\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\begin{gathered}
\mathrm{Cov}(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i,j \leqslant I, \quad \mathrm{Cov}(\beta_i, \beta_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i,j \leqslant J,\\
\mathrm{Cov}((\alpha\beta)_{i,j}, (\alpha\beta)_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J,\\
\mathrm{Cov}(\alpha_i, \beta_j) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\mathrm{Cov}(\alpha_i, (\alpha\beta)_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i,j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant J,\\
\mathrm{Cov}(\beta_i, (\alpha\beta)_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant i,k \leqslant J.
\end{gathered}$$

---

[3] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),\\ \text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k},\epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}\\ 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\begin{gathered}\mathrm{Cov}(\alpha_i,\epsilon_{j,k,l}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i,j \leqslant I, 1 \leqslant k \leqslant J,\ \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant K,\\ \mathrm{Cov}(\beta_i,\epsilon_{j,k,l}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant I, 1 \leqslant i,k \leqslant J,\ \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant K,\\ \mathrm{Cov}((\alpha\beta)_{i,j},\epsilon_{k,l,m}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i,k \leqslant I, 1 \leqslant j,l \leqslant J,\ \text{ et } 1 \leqslant m \leqslant K.\end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_{AB}, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, sc_B, sc_{AB}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 3.1.2.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Résiduelle	$n_R = IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{AB}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Interaction	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma_B^2}$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_{AB}^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
\widehat{\sigma_A^2} &= \frac{1}{JK}\left(S_A^2 - S_{AB}^2\right),\ \widehat{\sigma_B^2} = \frac{1}{IK}\left(S_B^2 - S_{AB}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{AB}^2} &= \frac{1}{K}\left(S_{AB}^2 - S_R^2\right),\\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S_R^2,
\end{aligned}$$

où $S_A^2 = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S_B^2 = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S_{AB}^2 = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais [4].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_{AB}^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{JK}\left(s_A^2 - s_{AB}^2\right),\ \widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IK}\left(s_B^2 - s_{AB}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{K}\left(s_{AB}^2 - s_R^2\right),\\
\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

3.3. Modèles à effets mixtes

3.3.1. Sans répétition

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

---

[4] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j). Nous supposons que :

$$\mathcal{L}\,(\beta_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\mathrm{Cov}(\beta_i, \beta_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i, j \leqslant J.$$

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),\\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i, k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j, l \leqslant J,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\mathrm{Cov}(\beta_i, \epsilon_{j,k}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant i, k \leqslant J.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, sc_B, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 3.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJ - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma_B^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, σ_B^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma_B^2} = \frac{1}{I}\left(S_B^2 - S_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S_R^2,
\end{aligned}$$

où $S_B^2 = \dfrac{SC_B}{n_B}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[5].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, …, α_I, σ_B^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i} = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma_B^2} = \frac{1}{I}\left(s_B^2 - s_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

3.3.2. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j) nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1\ldots I,\ j = 1\ldots J,\ k = 1\ldots K,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1,\ldots,J\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j) lors du $k-$ème essai. Nous supposons que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(\beta_j\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\mathcal{L}\left((\alpha\beta)_{i,j}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,
\end{aligned}$$

---

[5] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\begin{gathered}\mathrm{Cov}(\beta_i,\beta_j)=0 \text{ si } i\neq j \text{ et } 1\leqslant i,j\leqslant J,\\ \mathrm{Cov}((\alpha\beta)_{i,j},(\alpha\beta)_{k,l})=0 \text{ si } (i,j)\neq(k,l) \text{ avec } 1\leqslant i,k\leqslant I \text{ et } 1\leqslant j,l\leqslant J,\\ \mathrm{Cov}(\beta_i,(\alpha\beta)_{j,k})=0 \text{ si } 1\leqslant j\leqslant I \text{ et } 1\leqslant i,k\leqslant J.\end{gathered}$$

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j,k), 1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k})=\mathcal{N}(0,\sigma^2),\\ \text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k},\epsilon_{l,m,n})=0 \text{ si } (i,j,k)\neq(l,m,n) \text{ avec}\\ 1\leqslant i,l\leqslant I,\ 1\leqslant j,m\leqslant J \text{ et } 1\leqslant k,n\leqslant K,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\begin{gathered}\mathrm{Cov}(\beta_i,\epsilon_{j,k,l})=0 \text{ si } 1\leqslant j\leqslant I, 1\leqslant i,k\leqslant J,\ \text{ et } 1\leqslant l\leqslant K,\\ \mathrm{Cov}((\alpha\beta)_{i,j},\epsilon_{k,l,m})=0 \text{ si } 1\leqslant i,k\leqslant I, 1\leqslant j,l\leqslant J,\ \text{ et } 1\leqslant m\leqslant K.\end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, SC_B, SC_{AB}, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, sc_B, sc_{AB}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 3.1.2.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT}=SC_A+SC_B+SC_{AB}+SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A=I-1$
Facteur B	$n_B=J-1$
Interaction AB	$n_{AB}=(I-1)(J-1)$
Résiduelle	$n_R=IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT}=IJK-1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Interaction	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

$$\boxed{\mathcal{H}_0''' : \sigma^2_{AB} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1''' : \sigma^2_{AB} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$ précédente d'absence d'effet de l'interaction entre les facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2_B}$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, σ^2_B, σ^2_{AB}, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B} = \frac{1}{IK}\left(S^2_B - S^2_R\right)\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}} = \frac{1}{K}\left(S^2_{AB} - S^2_R\right)\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S^2_R,
\end{aligned}$$

où $S^2_B = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S^2_{AB} = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[6].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, σ^2_B, σ^2_{AB}, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IK}\left(s^2_B - s^2_R\right)\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{K}\left(s^2_{AB} - s^2_R\right)\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

---

[6] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Chapitre 4

Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés

Dans tout ce chapitre, nous utilisons les notations définies à la section Notations, page xi..

Nous sommes dans la situation particulière où les effets des niveaux du facteur B n'ont pas de signification concrète, par exemple ces niveaux dépendent du niveau du facteur A considéré et une étude des effets principaux du facteur B n'a pas de pertinence.

Nous ne pouvons nous servir d'un modèle où les facteurs sont emboîtés[1], que si nous disposons de répétitions. Dans le cas contraire où les essais ne seraient pas répétés, l'effet dû au facteur B ne pourra être étudié et le modèle que nous devrons utiliser pour analyser les données sera l'un de ceux exposés au chapitre 2.

Ainsi par exemple un fabriquant de détergents alimente plusieurs chaînes de distribution : A_1, A_2, $\ldots$, A_I. Nous pensons que les boîtes de produit livrées à certaines chaînes de distribution contiennent une masse de détergent inférieure à celle des autres chaînes de distribution. Pour étudier cette situation, nous décidons de prélever K boîtes dans J magasins de chaque chaîne. Ainsi le second facteur B_j, associé au $j-$ème magasin dans la chaîne, est un repère qui n'a aucune signification réelle : il n'y a, par exemple aucune relation entre le magasin n° 3 de la chaîne 1 et le magasin n° 3 de la chaîne 4. Il n'y a donc aucun intérêt à introduire un terme dans le modèle caractérisant l'effet principal du facteur B. Pour indiquer la dépendance des niveaux du second facteur B aux niveaux du premier facteur A nous notons les niveaux du second facteur B : $B_{j(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant I$ et $1 \leqslant j \leqslant J$.

---

[1] Ces types de modèles sont également appelés des modèles hiérarchiques ou en anglais *hierarchical* ou *nested models*.

4.1. Modèles à effets fixes

4.1.1. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles dépendant du niveau A_i du facteur A et étant alors notée $B_{j(i)}$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)})$ nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \dots I,\ j = 1 \dots J,\ k = 1 \dots K,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_{j(i)} = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)})$ lors du $k-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)})$ lors des K essais dans le tableau suivant :

A_1			…			A_I		
$B_{1(1)}$	…	$B_{J(1)}$	…	…	…	$B_{1(I)}$	…	$B_{J(I)}$
$Y_{1,1,1}$	…	$Y_{1,J,1}$	…	…	…	$Y_{I,1,1}$	…	$Y_{I,J,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	…	…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1,1,K}$	…	$Y_{1,J,K}$	…	…	…	$Y_{I,1,K}$	…	$Y_{I,J,K}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = JK \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation théorique du facteur B dans le facteur A est définie par :

$$SC_{B|A} = K \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left(Y_{i,j,k} - Y_{i,j,\bullet}\right)^2 .$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{i,j,k} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_{B|A} + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1,1}, \ldots, y_{1,1,K}, \ldots, y_{1,2,1}, \ldots, y_{1,2,K}, \ldots, y_{I,J,K}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

A_1			$\ldots$			A_I		
$B_{1(1)}$	$\ldots$	$B_{J(1)}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$B_{1(I)}$	$\ldots$	$B_{J(I)}$
$y_{1,1,1}$	$\ldots$	$y_{1,J,1}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$y_{I,1,1}$	$\ldots$	$y_{I,J,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{1,1,K}$	$\ldots$	$y_{1,J,K}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$y_{I,1,K}$	$\ldots$	$y_{I,J,K}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = JK \sum_{i=1}^{I} (y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation du facteur B dans le facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{B|A} = K \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left(y_{i,j,k} - y_{i,j,\bullet}\right)^2 .$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{i,j,k} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_{B|A} + sc_R.$$

Nous reconnaissons parmi les quantités définies ci-dessus, des quantités similaires à celles, SC_A, SC_B, SC_{AB}, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, sc_B, sc_{AB}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 3.1.2. Nous remarquons également que les nouvelles quantités, $SC_{B|A}$ et $sc_{B|A}$, sont liées aux précédentes par les relations :

$$\begin{aligned} SC_{B|A} &= SC_B + SC_{AB}, \\ sc_{B|A} &= sc_B + sc_{AB}. \end{aligned}$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Résiduelle	$n_R = IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1' : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet des facteurs B dans le facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_{1(1)}}$, $\widehat{\beta_{2(1)}}$, $\ldots$, $\widehat{\beta_{J(1)}}$, $\widehat{\beta_{1(2)}}$, $\ldots$, $\widehat{\beta_{J(I)}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, $\beta_{1(1)}$, $\beta_{2(1)}$, $\ldots$, $\beta_{J(1)}$, $\beta_{1(2)}$, $\ldots$, $\beta_{J(I)}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_{j(i)}} = Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJ(K-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[2].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_{1(1)}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_{2(1)}}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\beta_{J(1)}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_{1(2)}}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\beta_{J(I)}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, $\beta_{1(1)}$, $\beta_{2(1)}$, $\ldots$, $\beta_{J(1)}$, $\beta_{1(2)}$, $\ldots$, $\beta_{J(I)}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_{j(i)}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJ(K-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

4.2. Modèles à effets aléatoires

4.2.1. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les $\beta_{j(i)}$ représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante dépendant du niveau A_i du facteur A. Nous admettrons que les effets des $B_{j(i)}$, les $\beta_{j(i)}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma^2_{B|A}$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)})$ nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

---

[2] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \dots I,\ j = 1 \dots J,\ k = 1 \dots K$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)})$ lors du $k-$ème essai. Nous supposons que

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\left(\alpha_i\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I, \\ \mathcal{L}\left(\beta_{j(i)}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{B|A}),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\begin{gathered} \mathrm{Cov}(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \leqslant i, j \leqslant I, \\ \mathrm{Cov}(\beta_{j(i)}, \beta_{l(k)}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i, k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j, l \leqslant J, \\ \mathrm{Cov}(\alpha_i, \beta_{k(j)}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i, j \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant J. \end{gathered}$$

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered} \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ \text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec} \\ 1 \leqslant i, l \leqslant I,\ 1 \leqslant j, m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k, n \leqslant K, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\begin{gathered} \mathrm{Cov}(\alpha_i, \epsilon_{j,k,l}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i, j \leqslant I, 1 \leqslant k \leqslant J, \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant K, \\ \mathrm{Cov}(\beta_{j(i)}, \epsilon_{k,l,m}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i, k \leqslant I, 1 \leqslant j, l \leqslant J, \text{ et } 1 \leqslant m \leqslant K. \end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, $SC_{B|A}$, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, $sc_{B|A}$, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 4.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_{B|A} + SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Résiduelle	$n_R = IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_{B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans le facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma_{B|A}^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, $\sigma_{B|A}^2$, σ^2 du modèle se déduisent des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\sigma_A^2} = \frac{1}{JK}\left(S_A^2 - S_{B|A}^2\right),\\
&\widehat{\sigma_{B|A}^2} = \frac{1}{K}\left(S_{B|A}^2 - S_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S_R^2,
\end{aligned}$$

où $S_A^2 = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S_{B|A}^2 = \dfrac{SC_{B|A}}{n_{B|A}}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[3].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{B|A}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, σ_A^2, $\sigma_{B|A}^2$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{JK}\left(s_A^2 - s_{B|A}^2\right),\\
&\widehat{\sigma_{B|A}^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{K}\left(s_{B|A}^2 - s_R^2\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

4.3. Modèles à effets mixtes

Pour le plupart des auteurs d'ouvrages sur l'analyse de la variance, voir [Dag98b] à ce sujet par exemple, un facteur emboîté dans un facteur aléatoire doit être considéré comme aléatoire[4]. Ainsi le seul modèle mixte possible est le cas où le facteur A est fixe et le facteur que nous emboîtons dans A, le facteur B, est aléatoire.

4.3.1. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des $B_{j(i)}$, les $\beta_{j(i)}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma_{B|A}^2$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)})$ nous effectuons $K \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

---

[3] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

[4] Il existe néanmoins certains cas où nous pouvons utiliser un modèle mixte où le facteur emboîté est à effets fixes tandis que le facteur dans lequel il est emboîté est à effets aléatoires.

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)})$ lors du $k-$ème essai. Nous supposons que

$$\mathcal{L}\left(\beta_{j(i)}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{B|A}),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires :

$$\text{Cov}(\beta_{j(i)}, \beta_{l(k)}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J.$$

Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),\\ \text{et Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}\\ 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires et des erreurs :

$$\text{Cov}(\beta_{j(i)}, \epsilon_{k,l,m}) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i,k \leqslant I, 1 \leqslant j,l \leqslant J, \text{ et } 1 \leqslant m \leqslant K.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités SC_A, $SC_{B|A}$, SC_R, SC_{TOT}, sc_A, $sc_{B|A}$, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 4.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_{B|A} + SC_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B|A} = I(J-1)$
Résiduelle	$n_R = IJ(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_{B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2_{B|A}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, $\sigma^2_{B|A}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\ \widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_{B|A}} = \frac{1}{K}\left(S^2_{B|A} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)} = S^2_R,
\end{aligned}$$

où $S^2_{B|A} = \dfrac{SC_{B|A}}{n_{B|A}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[5].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{B|A}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$, des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, $\sigma^2_{B|A}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\ \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_{B|A}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{K}\left(s^2_{B|A} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

---

[5] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Chapitre 5

Analyse de la variance à trois facteurs

Dans tout ce chapitre, nous utilisons les notations définies à la section Notations, page xi..

5.1. Modèles à effets fixes

5.1.1. Sans répétition

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Un facteur contrôlé C se présente sous K modalités, chacune d'entre elles étant notée C_k. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + \epsilon_{i,j,k}, \\
i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K, \\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{K} \gamma_k = 0, \\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\}, \\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\}, \\
\sum_{j=1}^{J} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\},
\end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k). Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}
\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\
\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec } 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K.
\end{gathered}$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k) dans le tableau suivant :

Facteur A	Facteur B	Facteur C	Réponse Y
A_1	B_1	C_1	$Y_{1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	$Y_{I,1,1}$
A_1	B_2	C_1	$Y_{1,2,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_1	$Y_{I,J,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_2	$Y_{1,1,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_K	$Y_{I,J,K}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = JK\sum_{i=1}^{I}(Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur B est définie par :

$$SC_B = IK\sum_{j=1}^{J}(Y_{\bullet,j,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur C est définie par :

$$SC_C = IJ\sum_{k=1}^{K}(Y_{\bullet,\bullet,k} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs A et B est définie par :

$$SC_{AB} = K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs B et C est définie par :

$$SC_{BC} = I\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{\bullet,j,k} - Y_{\bullet,j,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs A et C est définie par :

$$SC_{AC} = J\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(Y_{i,\bullet,k} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{i,j,k} - Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,k} - Y_{\bullet,j,k} + Y_{i,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,j,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,k} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{i,j,k} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_C + SC_{AB} + SC_{AC} + SC_{BC} + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1,1}, \ldots, y_{I,1,1}, y_{1,2,1}, \ldots, y_{I,J,1}, y_{1,1,2}, \ldots, y_{I,J,K}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

Facteur A	Facteur B	Facteur C	Réponse Y
A_1	B_1	C_1	$y_{1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	$y_{I,1,1}$
A_1	B_2	C_1	$y_{1,2,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_1	$y_{I,J,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_2	$y_{1,1,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_K	$y_{I,J,K}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = JK\sum_{i=1}^{I}(y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_B = IK\sum_{j=1}^{J}(y_{\bullet,j,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_C = IJ \sum_{k=1}^{K} (y_{\bullet,\bullet,k} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs A et B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{AB} = K \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs B et C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{BC} = I \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{\bullet,j,k} - y_{\bullet,j,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k} + y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs A et C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{AC} = J \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} (y_{i,\bullet,k} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k} + y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{i,j,k} - y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,k} - y_{\bullet,j,k} + y_{i,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,j,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,k} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (y_{i,j,k} - y_{\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'''$ ou $\mathcal{H}_1'''$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1' : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_K = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \text{Il existe } k_0 \in \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } \gamma_{k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : (\alpha\gamma)_{1,1} = (\alpha\gamma)_{1,2} = \cdots = (\alpha\gamma)_{1,K} = (\alpha\gamma)_{2,1} = \cdots = (\alpha\gamma)_{I,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \text{Il existe } (i_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } (\alpha\gamma)_{i_0,k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : (\beta\gamma)_{1,1} = (\beta\gamma)_{1,2} = \cdots = (\beta\gamma)_{1,K} = (\beta\gamma)_{2,1} = \cdots = (\beta\gamma)_{J,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \text{Il existe } (j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } (\beta\gamma)_{j_0,k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}$, …, $\widehat{\beta_J}$, $\widehat{\gamma_1}$, …, $\widehat{\gamma_K}$, $\widehat{(\alpha\beta)}_{1,1}$, …, $\widehat{(\alpha\beta)}_{I,J}$, $\widehat{(\alpha\gamma)}_{1,1}$, …, $\widehat{(\alpha\gamma)}_{I,K}$, $\widehat{(\beta\gamma)}_{1,1}$, …, $\widehat{(\beta\gamma)}_{J,K}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, β_1, …, β_J, γ_1, …, γ_K, $(\alpha\beta)_{1,1}$, …, $(\alpha\beta)_{I,J}$, $(\alpha\gamma)_{1,1}$, …, $(\alpha\gamma)_{I,K}$, $(\beta\gamma)_{1,1}$, …, $(\beta\gamma)_{J,K}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\gamma_k} = Y_{\bullet,\bullet,k} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta)}_{i,j} = Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\gamma)}_{i,k} = Y_{i,\bullet,k} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\beta\gamma)}_{j,k} = Y_{\bullet,j,k} - Y_{\bullet,j,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[1].

---

[1] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y}), \widehat{\gamma_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\gamma_K}(\boldsymbol{y}), \widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}(\boldsymbol{y}), \widehat{(\alpha\gamma)_{1,1}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\gamma)_{I,K}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\beta\gamma)_{1,1}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{(\beta\gamma)_{J,K}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, β_1, …, β_J, γ_1, …, γ_K, $(\alpha\beta)_{1,1}$, …, $(\alpha\beta)_{I,J}$, $(\alpha\gamma)_{1,1}$, …, $(\alpha\gamma)_{I,K}$, $(\beta\gamma)_{1,1}$, …, $(\beta\gamma)_{J,K}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\gamma_k}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,k} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\gamma)_{i,k}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,k} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\beta\gamma)_{j,k}}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,k} - y_{\bullet,j,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

5.1.2. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Un facteur contrôlé C se présente sous K modalités, chacune d'entre elles étant notée C_k. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} + \epsilon_{i,j,k,l},$$
$$i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{K} \gamma_k = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\},$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\},$$
$$\sum_{j=1}^{J} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{k=1}^{K} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\},$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (j,k) \in \{1, \ldots, J\} \times \{1, \ldots, K\},$$
$$\sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (i,k) \in \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, K\},$$

$$\sum_{k=1}^{K}(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (i,j) \in \{1,\ldots,I\} \times \{1,\ldots,J\},$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k) lors du $l-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p)$$
$$\text{avec } 1 \leqslant i,m \leqslant I,\ 1 \leqslant j,n \leqslant J,\ 1 \leqslant k,o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l,p \leqslant L.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k) lors des L essais dans le tableau suivant :

Facteur A	Facteur B	Facteur C	Essai n°	Réponse Y
A_1	B_1	C_1	1	$Y_{1,1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_1	L	$Y_{1,1,1,L}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	1	$Y_{I,1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	L	$Y_{I,1,1,L}$
A_1	B_2	C_1	1	$Y_{1,2,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_1	L	$Y_{I,J,1,L}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_2	1	$Y_{1,1,2,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_K	L	$Y_{I,J,K,L}$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = JKL\sum_{i=1}^{I}(Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur B est définie par :

$$SC_B = IKL\sum_{j=1}^{J}(Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur C est définie par :

$$SC_C = IJL\sum_{k=1}^{K}(Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs A et B est définie par :

$$SC_{AB} = KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs B et C est définie par :

$$SC_{BC} = IL\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{\bullet,j,k,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due à l'interaction des facteurs A et C est définie par :

$$SC_{AC} = JL\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(Y_{i,\bullet,k,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation théorique due à l'interaction d'ordre 2 entre les facteurs A, B et C est définie par :

$$SC_{ABC} = L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{i,j,k,\bullet} - Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,k,\bullet} - Y_{\bullet,j,k,\bullet} + Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(Y_{i,j,k,l} - Y_{i,j,k,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(Y_{i,j,k,l} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_B + SC_C + SC_{AB} + SC_{AC} + SC_{BC} + SC_{ABC} + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1,1,1}, \ldots, y_{1,1,1,L}, \ldots, y_{I,1,1,1}, \ldots, y_{I,1,1,L}, y_{1,2,1,1}, \ldots,$ $y_{I,J,1,L}, y_{1,1,2,1}, \ldots, y_{I,J,K,L}$ permet de construire une réalisation du tableau précédent :

Facteur A	Facteur B	Facteur C	Essai n$^{\text{o}}$	Donnée expérimentale y
A_1	B_1	C_1	1	$y_{1,1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_1	L	$y_{1,1,1,L}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	1	$y_{I,1,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_1	C_1	L	$y_{I,1,1,L}$
A_1	B_2	C_1	1	$y_{1,2,1,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_1	L	$y_{I,J,1,L}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_1	B_1	C_2	1	$y_{1,1,2,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	B_J	C_K	L	$y_{I,J,K,L}$

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = JKL\sum_{i=1}^{I}(y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_B = IKL\sum_{j=1}^{J}(y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_C = IJL\sum_{k=1}^{K}(y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs A et B observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{AB} = KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs B et C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{BC} = IL\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{\bullet,j,k,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction des facteurs A et C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{AC} = JL\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,\bullet,k,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due à l'interaction d'ordre 2 entre les facteurs A, B et C observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{ABC} = L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,j,k,\bullet} - y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,k,\bullet} - y_{\bullet,j,k,\bullet} + y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(y_{i,j,k,l} - y_{i,j,k,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(y_{i,j,k,l} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + sc_{ABC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Interaction ABC	$n_{ABC} = (I-1)(J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJKL - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Interaction ABC	sc_{ABC}	n_{ABC}	$s_{ABC}^2 = \dfrac{sc_{ABC}}{n_{ABC}}$	$f_{ABC} = \dfrac{s_{ABC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(7)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(7)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_K = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \text{Il existe } k_0 \in \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } \gamma_{k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : (\alpha\gamma)_{1,1} = (\alpha\gamma)_{1,2} = \cdots = (\alpha\gamma)_{1,K} = (\alpha\gamma)_{2,1} = \cdots = (\alpha\gamma)_{I,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \text{Il existe } (i_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } (\alpha\gamma)_{i_0,k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : (\beta\gamma)_{1,1} = (\beta\gamma)_{1,2} = \cdots = (\beta\gamma)_{1,K} = (\beta\gamma)_{2,1} = \cdots = (\beta\gamma)_{J,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \text{Il existe } (j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \text{ tel que } (\beta\gamma)_{j_0,k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(7)} : (\alpha\beta\gamma)_{1,1,1} = (\alpha\beta\gamma)_{1,1,2} = \cdots = (\alpha\beta\gamma)_{1,1,K} = (\alpha\beta\gamma)_{2,1,1} = \cdots = (\alpha\beta\gamma)_{I,J,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(7)} : \exists\ (i_0, j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \mid (\alpha\beta\gamma)_{i_0,j_0,k_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(7)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction, d'ordre 3, des facteurs A, B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{ABC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{ABC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}$, $\ldots$, $\widehat{\beta_J}$, $\widehat{\gamma_1}$, $\ldots$, $\widehat{\gamma_K}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}$, $\ldots$, $\widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}$, $\widehat{(\alpha\gamma)_{1,1}}$, $\ldots$, $\widehat{(\alpha\gamma)_{I,K}}$, $\widehat{(\beta\gamma)_{1,1}}$, $\ldots$, $\widehat{(\beta\gamma)_{J,K}}$, $\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{1,1,1}}$, $\ldots$, $\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{I,J,K}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, β_1, $\ldots$, β_J, γ_1, $\ldots$, γ_K, $(\alpha\beta)_{1,1}$, $\ldots$, $(\alpha\beta)_{I,J}$, $(\alpha\gamma)_{1,1}$, $\ldots$, $(\alpha\gamma)_{I,K}$, $(\beta\gamma)_{1,1}$, $\ldots$, $(\beta\gamma)_{J,K}$,

$(\alpha\beta\gamma)_{1,1,1}$, …, $(\alpha\beta\gamma)_{I,J,K}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\gamma_k} = Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}} = Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\gamma)_{i,k}} = Y_{i,\bullet,k,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\beta\gamma)_{j,k}} = Y_{\bullet,j,k,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}} = Y_{i,j,k,\bullet} - Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,k,\bullet} - Y_{\bullet,j,k,\bullet} + Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + Y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - \widehat{\mu},\\
&\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[2].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y}), \widehat{\gamma_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\gamma_K}(\boldsymbol{y}), \widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}(\boldsymbol{y}), \widehat{(\alpha\gamma)_{1,1}}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{(\alpha\gamma)_{I,K}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\beta\gamma)_{1,1}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{(\beta\gamma)_{J,K}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{1,1,1}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{I,J,K}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, β_1, …, β_J, γ_1, …, γ_K, $(\alpha\beta)_{1,1}$, …, $(\alpha\beta)_{I,J}$, $(\alpha\gamma)_{1,1}$, …, $(\alpha\gamma)_{I,K}$, $(\beta\gamma)_{1,1}$, …, $(\beta\gamma)_{J,K}$, $(\alpha\beta\gamma)_{1,1,1}$, …, $(\alpha\beta\gamma)_{I,J,K}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\gamma_k}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{(\alpha\gamma)_{i,k}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,k,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\beta\gamma)_{j,k}}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,k,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,k,\bullet} - y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,k,\bullet} - y_{\bullet,j,k,\bullet} + y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + y_{\bullet,\bullet,k,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\\
&\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

5.2. Modèles à effets aléatoires

5.2.1. Sans répétition

Les α_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_C^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

---

[2] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered} Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + \epsilon_{i,j,k}, \\ i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K, \end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k). Nous supposons que :

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\,(\alpha_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I, \\ \mathcal{L}\,(\beta_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}\,(\gamma_k) = \mathcal{N}(0, \sigma_C^2),\ \forall\ k, 1 \leqslant k \leqslant K, \\ \mathcal{L}\,((\alpha\beta)_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}\,((\alpha\gamma)_{i,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AC}^2),\ \forall\ (i,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \\ \mathcal{L}\,((\beta\gamma)_{j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{BC}^2),\ \forall\ (j,k), 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered} \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec } 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{AB}^2 + s_{BC}^2 - s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_{AC}^2 + s_{BC}^2 - s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma_A^2 = 0}$$
$$\text{contre}$$
$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement** [3] une loi de Fisher à $I-1$ et $n^{'}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'} = \frac{\left(s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_R^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_R^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$
$$\text{contre}$$
$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement** [5] une loi de Fisher à $J-1$ et $n^{''}$ degrés de liberté avec :

$$n^{''} = \frac{\left(s_{AB}^2 + s_{BC}^2 - s_R^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s_{BC}^2\right)^2}{(J-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_R^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma_C^2 = 0}$$
$$\text{contre}$$
$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma_C^2 \neq 0.}$$

---

[3] Nous utilisons ici l'approximation dite de Satterthwaite.

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[5] une loi de Fisher à $K-1$ et $n^{'''}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'''} = \frac{\left(s^2_{AC} + s^2_{BC} - s^2_R\right)^2}{\dfrac{\left(s^2_{AC}\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s^2_{BC}\right)^2}{(J-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s^2_{R}\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : \sigma^2_{AB} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \sigma^2_{AB} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma^2_{AC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma^2_{AC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma^2_{BC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma^2_{BC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$

degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma_B^2}$, $\widehat{\sigma_C^2}$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}$, $\widehat{\sigma_{AC}^2}$, $\widehat{\sigma_{BC}^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_C^2, σ_{AB}^2, σ_{AC}^2, σ_{BC}^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y}, \\
\widehat{\sigma_A^2} &= \frac{1}{JK}\left(S_A^2 - S_{AB}^2 - S_{AC}^2 + S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_B^2} &= \frac{1}{IK}\left(S_B^2 - S_{AB}^2 - S_{BC}^2 + S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_C^2} &= \frac{1}{IJ}\left(S_C^2 - S_{AC}^2 - S_{BC}^2 + S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{AB}^2} &= \frac{1}{K}\left(S_{AB}^2 - S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{AC}^2} &= \frac{1}{J}\left(S_{AC}^2 - S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{BC}^2} &= \frac{1}{I}\left(S_{BC}^2 - S_R^2\right), \\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = S_R^2,
\end{aligned}$$

où $S_A^2 = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S_B^2 = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S_C^2 = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S_{AB}^2 = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$, $S_{AC}^2 = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S_{BC}^2 = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais [6].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_C^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{AC}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{BC}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_C^2, σ_{AB}^2, σ_{AC}^2, σ_{BC}^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y}, \\
\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{JK}\left(s_A^2 - s_{AB}^2 - s_{AC}^2 + s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{IK}\left(s_B^2 - s_{AB}^2 - s_{BC}^2 + s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_C^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{IJ}\left(s_C^2 - s_{AC}^2 - s_{BC}^2 + s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{K}\left(s_{AB}^2 - s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{AC}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{J}\left(s_{AC}^2 - s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma_{BC}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{I}\left(s_{BC}^2 - s_R^2\right), \\
\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

---

[6] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Remarque 5.2.1. Ainsi lorsque les trois facteurs sont aléatoires, et que nous cherchons à tester l'existence d'un effet de l'un d'entre eux nous devons utiliser une approximation. Cette situation se démarque nettement de celle où tous les facteurs sauf au plus un sont à effets fixes voir les paragraphes 5.1.1 et 5.3.1.

5.2.2. Avec répétitions

Les α_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_B^2. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_C^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered} Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} + \epsilon_{i,j,k,l}, \\ i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L, \end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k) lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(\alpha_i) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I, \\ \mathcal{L}(\beta_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}(\gamma_k) = \mathcal{N}(0, \sigma_C^2),\ \forall\ k, 1 \leqslant k \leqslant K, \\ \mathcal{L}((\alpha\beta)_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}((\alpha\gamma)_{i,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AC}^2),\ \forall\ (i,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \\ \mathcal{L}((\beta\gamma)_{j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{BC}^2),\ \forall\ (j,k), 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \\ \mathcal{L}((\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{ABC}^2),\ \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$ et $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered} \forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p) \\ \text{avec } 1 \leqslant i, m \leqslant I,\ 1 \leqslant j, n \leqslant J,\ 1 \leqslant k, o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l, p \leqslant L, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$ et $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_{ABC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.2.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + s_{ABC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Interaction ABC	$n_{ABC} = (I-1)(J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{AB}^2 + s_{BC}^2 - s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_{AC}^2 + s_{BC}^2 - s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Interaction ABC	sc_{ABC}	n_{ABC}	$s_{ABC}^2 = \dfrac{sc_{ABC}}{n_{ABC}}$	$f_{ABC} = \dfrac{s_{ABC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(7)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(7)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[7] une loi de Fisher à $I-1$ et $n^{'}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'} = \frac{\left(s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_{ABC}^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_{ABC}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[6] une loi de Fisher à $J-1$ et $n^{''}$ degrés de liberté avec :

$$n^{''} = \frac{\left(s_{AB}^2 + s_{BC}^2 - s_{ABC}^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s_{BC}^2\right)^2}{(J-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_{ABC}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma_C^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma_C^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[6] une loi de Fisher à $K-1$ et $n^{'''}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'''} = \frac{\left(s_{AC}^2 + s_{BC}^2 - s_{ABC}^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_{BC}^2\right)^2}{(J-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s_{ABC}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

---

[7] Nous utilisons ici l'approximation dite de Satterthwaite.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : \sigma^2_{AB} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \sigma^2_{AB} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma^2_{AC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma^2_{AC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma^2_{BC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma^2_{BC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(7)} : \sigma^2_{ABC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(7)} : \sigma^2_{ABC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(7)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction d'ordre trois des facteurs A, B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{ABC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{ABC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma_A^2}$, $\widehat{\sigma_B^2}$, $\widehat{\sigma_C^2}$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}$, $\widehat{\sigma_{AC}^2}$, $\widehat{\sigma_{BC}^2}$, $\widehat{\sigma_{ABC}^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_C^2, σ_{AB}^2, σ_{AC}^2, σ_{BC}^2, σ_{ABC}^2, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
\widehat{\sigma_A^2} &= \frac{1}{JKL}\left(S_A^2 - S_{AB}^2 - S_{AC}^2 + S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_B^2} &= \frac{1}{IKL}\left(S_B^2 - S_{AB}^2 - S_{BC}^2 + S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_C^2} &= \frac{1}{IJL}\left(S_C^2 - S_{AC}^2 - S_{BC}^2 + S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{AB}^2} &= \frac{1}{KL}\left(S_{AB}^2 - S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{AC}^2} &= \frac{1}{JL}\left(S_{AC}^2 - S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{BC}^2} &= \frac{1}{IL}\left(S_{BC}^2 - S_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{ABC}^2} &= \frac{1}{L}\left(S_{ABC}^2 - S_R^2\right),\\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

où $S_A^2 = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S_B^2 = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S_C^2 = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S_{AB}^2 = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$, $S_{AC}^2 = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S_{BC}^2 = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$, $S_{ABC}^2 = \dfrac{SC_{ABC}}{n_{ABC}}$ et $S_R^2 = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[7].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_C^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{AC}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{BC}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{ABC}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, σ_A^2, σ_B^2, σ_C^2, σ_{AB}^2, σ_{AC}^2, σ_{BC}^2, σ_{ABC}^2, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{JKL}\left(s_A^2 - s_{AB}^2 - s_{AC}^2 + s_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_B^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{IKL}\left(s_B^2 - s_{AB}^2 - s_{BC}^2 + s_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_C^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{IJL}\left(s_C^2 - s_{AC}^2 - s_{BC}^2 + s_{ABC}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{AB}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{KL}\left(s_{AB}^2 - s_{ABC}^2\right),
\end{aligned}$$

---

[7] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

$$\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{JL}\left(s^2_{AC} - s^2_{ABC}\right),$$
$$\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IL}\left(s^2_{BC} - s^2_{ABC}\right),$$
$$\widehat{\sigma^2_{ABC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{L}\left(s^2_{ABC} - s^2_{R}\right),$$
$$\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s^2_R.$$

5.3. Modèles à effets mixtes

5.3.1. Sans répétition

Il existe deux possibilités : soit deux facteurs sont fixes et un est aléatoire, soit un facteur est fixe et deux sont aléatoires.

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes et un facteur est à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ^2_C. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + \epsilon_{i,j,k},$$
$$i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\},\ \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\},$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\} \text{ et } \sum_{j=1}^{J} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k). Nous supposons que :

$$\mathcal{L}(\gamma_k) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_C),\ \forall\, k, 1 \leqslant k \leqslant K,$$
$$\mathcal{L}((\alpha\gamma)_{i,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{AC}),\ \forall\, (i,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$
$$\mathcal{L}((\beta\gamma)_{j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{BC}),\ \forall\, (j,k), 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires γ_k, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k},\epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec } 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires γ_k, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma_C^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma_C^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma_{AC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma_{AC}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma^2_{BC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma^2_{BC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, ..., $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}$, ..., $\widehat{\beta_J}$, $\widehat{\sigma^2_C}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}$, ..., $\widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, ..., α_I, β_1, ..., β_J, σ^2_C, $(\alpha\beta)_{1,1}$, ..., $(\alpha\beta)_{I,J}$, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_C} = \frac{1}{IJ}\left(S^2_C - S^2_R\right),\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}} = Y_{i,j,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}} = \frac{1}{J}\left(S^2_{AC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}} = \frac{1}{I}\left(S^2_{BC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = S^2_R.
\end{aligned}$$

où $S^2_C = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S^2_{AC} = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S^2_{BC} = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[8].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, ..., $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y})$, ..., $\widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y})$, ..., $\widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, ..., α_I, β_1, ..., β_J, σ^2_C, $(\alpha\beta)_{1,1}$, ..., $(\alpha\beta)_{I,J}$, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

---

[8] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IJ}\left(s^2_C - s^2_R\right),\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet} + \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{J}\left(s^2_{AC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{I}\left(s^2_{BC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ^2_B. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ^2_C. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons une mesure d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + \epsilon_{i,j,k},\\
i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\\
\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\},
\end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k). Nous supposons que :

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}\left(\beta_j\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_B),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\mathcal{L}\left(\gamma_k\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_C),\ \forall\ k, 1 \leqslant k \leqslant K,\\
\mathcal{L}\left((\alpha\beta)_{i,j}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{AB}),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\mathcal{L}\left((\alpha\gamma)_{i,k}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{AC}),\ \forall\ (i,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
\mathcal{L}\left((\beta\gamma)_{j,k}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{BC}),\ \forall\ (j,k), 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,
\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}
\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),\\
\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec } 1 \leqslant i,l \leqslant I,\ 1 \leqslant j,m \leqslant J \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant K,
\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$ et $(\beta\gamma)_{j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = (I-1)(J-1)(K-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[9] une loi de Fisher à $I-1$ et $n^{'}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'} = \frac{\left(s^2_{AB} + s^2_{AC} - s^2_R\right)^2}{\dfrac{\left(s^2_{AB}\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s^2_{AC}\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s^2_R\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_B = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma^2_B \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma^2_C = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma^2_C \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : \sigma^2_{AB} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \sigma^2_{AB} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

---

[9] Nous utilisons toujours l'approximation de Satterthwaite.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma^2_{AC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma^2_{AC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma^2_{BC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma^2_{BC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, ..., $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2_B}$, $\widehat{\sigma^2_C}$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, ..., α_I, σ^2_B, σ^2_C, σ^2_{AB}, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B} = \frac{1}{IK}\left(S^2_B - S^2_{BC}\right),\ \widehat{\sigma^2_C} = \frac{1}{IJ}\left(S^2_C - S^2_{BC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}} = \frac{1}{K}\left(S^2_{AB} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}} = \frac{1}{J}\left(S^2_{AC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}} = \frac{1}{I}\left(S^2_{BC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = S^2_R.
\end{aligned}$$

où $S^2_B = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S^2_C = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S^2_{AB} = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$, $S^2_{AC} = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S^2_{BC} = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$. Ce sont des estimateurs sans biais[10].

---

[10] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, σ^2_B, σ^2_C, σ^2_{AB}, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IK}\left(s^2_B - s^2_{BC}\right),\ \widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IJ}\left(s^2_C - s^2_{BC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{K}\left(s^2_{AB} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{J}\left(s^2_{AC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{I}\left(s^2_{BC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{(I-1)(J-1)(K-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

Remarque 5.3.1. Ainsi lorsque deux facteurs sont aléatoires, et que nous cherchons à tester l'existence d'un effet du troisième facteur, ici à effets fixes, nous devons utiliser une approximation, ici celle de Satterthwaite. Cette situation se démarque nettement de celle où tous les facteurs sauf au plus un sont à effets fixes.

5.3.2. Avec répétitions

Il existe deux possibilités : soit deux facteurs sont fixes et un est aléatoire, soit un facteur est fixe et deux sont aléatoires.

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes et un facteur est à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles étant notée B_j. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ^2_C. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} + \epsilon_{i,j,k,l},\\
i = 1\ldots I,\ j = 1\ldots J,\ k = 1\ldots K,\ l = 1\ldots L,\\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I}\alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J}\beta_j = 0,\\
\sum_{i=1}^{I}(\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1,\ldots,J\},\ \sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,I\},
\end{gathered}$$

$$\sum_{i=1}^{I}(\alpha\gamma)_{i,k}=0,\ \forall k\in\{1,\ldots,K\}\ \text{ et }\ \sum_{j=1}^{J}(\beta\gamma)_{j,k}=0,\ \forall k\in\{1,\ldots,K\}\,,$$
$$\sum_{i=1}^{I}(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}=0,\ \forall(j,k)\in\{1,\ldots,J\}\times\{1,\ldots,K\}\,,$$
$$\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}=0,\ \forall(i,k)\in\{1,\ldots,I\}\times\{1,\ldots,K\}\,,$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i,B_j,C_k) lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\left(\gamma_k\right)=\mathcal{N}(0,\sigma_C^2),\ \forall\ k,1\leqslant k\leqslant K,\\ \mathcal{L}\left((\alpha\gamma)_{i,k}\right)=\mathcal{N}(0,\sigma_{AC}^2),\ \forall\ (i,k),1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant k\leqslant K,\\ \mathcal{L}\left((\beta\gamma)_{j,k}\right)=\mathcal{N}(0,\sigma_{BC}^2),\ \forall\ (j,k),1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K,\\ \mathcal{L}\left((\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}\right)=\mathcal{N}(0,\sigma_{ABC}^2),\ \forall\ (i,j,k),1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires γ_k, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$, $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j,k,l),1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K,\ 1\leqslant l\leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l})=\mathcal{N}(0,\sigma^2),\\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l},\epsilon_{m,n,o,p})=0\text{ si }(i,j,k,l)\neq(m,n,o,p)\\ \text{avec }1\leqslant i,m\leqslant I,\ 1\leqslant j,n\leqslant J,\ 1\leqslant k,o\leqslant K\text{ et }1\leqslant l,p\leqslant L,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires γ_k, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$ et $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_{ABC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.2.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT}=sc_A+sc_B+sc_C+sc_{AB}+sc_{AC}+sc_{BC}+sc_{ABC}+sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A=I-1$
Facteur B	$n_B=J-1$
Facteur C	$n_C=K-1$
Interaction AB	$n_{AB}=(I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC}=(I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC}=(J-1)(K-1)$
Interaction ABC	$n_{ABC}=(I-1)(J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R=IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT}=IJKL-1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AC}^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'''$ ou $\mathcal{H}_1'''$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Interaction ABC	sc_{ABC}	n_{ABC}	$s_{ABC}^2 = \dfrac{sc_{ABC}}{n_{ABC}}$	$f_{ABC} = \dfrac{s_{ABC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(7)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(7)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma_C^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma_C^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma_{AC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma_{AC}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma_{BC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma_{BC}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(7)} : \sigma_{ABC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(7)} : \sigma_{ABC}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(7)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction d'ordre trois des facteurs A, B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{ABC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{ABC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_1}$, $\ldots$, $\widehat{\beta_J}$, $\widehat{\sigma_C^2}$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}$, $\ldots$, $\widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}$, $\widehat{\sigma_{AC}^2}$, $\widehat{\sigma_{BC}^2}$, $\widehat{\sigma_{ABC}^2}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, β_1, $\ldots$, β_J, σ_C^2, $(\alpha\beta)_{1,1}$, $\ldots$, $(\alpha\beta)_{I,J}$, σ_{AC}^2, σ_{BC}^2, σ_{ABC}^2, σ^2

du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j} = Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_C} = \frac{1}{IJL}\left(S^2_C - S^2_R\right),\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}} = Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}} = \frac{1}{JL}\left(S^2_{AC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}} = \frac{1}{IL}\left(S^2_{BC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{ABC}} = \frac{1}{L}\left(S^2_{ABC} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S^2_R.
\end{aligned}$$

où $S^2_C = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S^2_{AC} = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S^2_{BC} = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$, $S^2_{ABC} = \dfrac{SC_{ABC}}{n_{ABC}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[11].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{\beta_J}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y})$, $\ldots$, $\widehat{(\alpha\beta)_{I,J}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{ABC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, $\ldots$, α_I, β_1, $\ldots$, β_J, σ^2_C, $(\alpha\beta)_{1,1}$, $\ldots$, $(\alpha\beta)_{I,J}$, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2_{ABC}, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IJL}\left(s^2_C - s^2_R\right),\\
&\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,j,\bullet,\bullet} + \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{JL}\left(s^2_{AC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IL}\left(s^2_{BC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{ABC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{L}\left(s^2_{ABC} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les β_j représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des B_j, les β_j, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ^2_B. Les γ_k représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des C_k, les γ_k, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_C^2. Pour chacun des couples de modalités (A_i, B_j, C_k) nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

---

[11] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} + \epsilon_{i,j,k,l},$$
$$i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, J\} \text{ et } \sum_{i=1}^{I} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, K\},$$
$$\sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta\gamma)_{i,j,k} = 0,\ \forall (j,k) \in \{1, \ldots, J\} \times \{1, \ldots, K\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions (A_i, B_j, C_k) lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\mathcal{L}(\beta_j) = \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),\ \forall\ j, 1 \leqslant j \leqslant J,$$
$$\mathcal{L}(\gamma_k) = \mathcal{N}(0, \sigma_C^2),\ \forall\ k, 1 \leqslant k \leqslant K,$$
$$\mathcal{L}((\alpha\beta)_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AB}^2),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,$$
$$\mathcal{L}((\alpha\gamma)_{i,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{AC}^2),\ \forall\ (i,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$
$$\mathcal{L}((\beta\gamma)_{j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{BC}^2),\ \forall\ (j,k), 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$
$$\mathcal{L}((\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{ABC}^2),\ \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$ et $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p)$$
$$\text{avec } 1 \leqslant i,m \leqslant I,\ 1 \leqslant j,n \leqslant J,\ 1 \leqslant k,o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l,p \leqslant L,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{i,j}$, $(\alpha\gamma)_{i,k}$, $(\beta\gamma)_{j,k}$ et $(\alpha\beta\gamma)_{i,j,k}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, sc_B, sc_C, sc_{AB}, sc_{AC}, sc_{BC}, sc_{ABC}, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 5.1.2.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_B + sc_C + sc_{AB} + sc_{AC} + sc_{BC} + s_{ABC} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B	$n_B = J - 1$
Facteur C	$n_C = K - 1$
Interaction AB	$n_{AB} = (I-1)(J-1)$
Interaction AC	$n_{AC} = (I-1)(K-1)$
Interaction BC	$n_{BC} = (J-1)(K-1)$
Interaction ABC	$n_{ABC} = (I-1)(J-1)(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJK - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{AB}^2 + s_{AC}^2 - s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B	sc_B	n_B	$s_B^2 = \dfrac{sc_B}{n_B}$	$f_B = \dfrac{s_B^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C	sc_C	n_C	$s_C^2 = \dfrac{sc_C}{n_C}$	$f_C = \dfrac{s_C^2}{s_{BC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Interaction AB	sc_{AB}	n_{AB}	$s_{AB}^2 = \dfrac{sc_{AB}}{n_{AB}}$	$f_{AB} = \dfrac{s_{AB}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(4)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(4)}$
Interaction AC	sc_{AC}	n_{AC}	$s_{AC}^2 = \dfrac{sc_{AC}}{n_{AC}}$	$f_{AC} = \dfrac{s_{AC}^2}{s_{ABC}^2}$	$\mathcal{H}_0^{(5)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(5)}$
Interaction BC	sc_{BC}	n_{BC}	$s_{BC}^2 = \dfrac{sc_{BC}}{n_{BC}}$	$f_{BC} = \dfrac{s_{BC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(6)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(6)}$
Interaction ABC	sc_{ABC}	n_{ABC}	$s_{ABC}^2 = \dfrac{sc_{ABC}}{n_{ABC}}$	$f_{ABC} = \dfrac{s_{ABC}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{(7)}$ ou $\mathcal{H}_1^{(7)}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit **approximativement**[12] une loi de Fisher à $I-1$ et $n^{'}$ degrés de liberté avec :

$$n^{'}=\frac{\left(s_{AB}^2+s_{AC}^2-s_R^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)}+\dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)}+\dfrac{\left(s_R^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}}.$$

Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''}:\sigma_B^2=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''}:\sigma_B^2\neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_B est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_B est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''}:\sigma_C^2=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''}:\sigma_C^2\neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_C est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_C est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(4)}:\sigma_{AB}^2=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(4)}:\sigma_{AB}^2\neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(4)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AB} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$

---

[12] Nous utilisons toujours l'approximation de Satterthwaite.

degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AB} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(5)} : \sigma^2_{AC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(5)} : \sigma^2_{AC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(5)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs A et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{AC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{AC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(6)} : \sigma^2_{BC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(6)} : \sigma^2_{BC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(6)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction des facteurs B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{BC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{BC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{(7)} : \sigma^2_{ABC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{(7)} : \sigma^2_{ABC} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{(7)}$ précédente d'absence d'effet de l'interaction d'ordre trois des facteurs A, B et C et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_{ABC} est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_{ABC} est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2_B}$, $\widehat{\sigma^2_C}$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}$, $\widehat{\sigma^2_{ABC}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, σ^2_B, σ^2_C, σ^2_{AB}, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2_{ABC}, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B} = \frac{1}{IKL}\left(S^2_B - S^2_{BC}\right),\ \widehat{\sigma^2_C} = \frac{1}{IJL}\left(S^2_C - S^2_{BC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}} = \frac{1}{KL}\left(S^2_{AB} - S^2_{ABC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}} = \frac{1}{JL}\left(S^2_{AC} - S^2_{ABC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}} = \frac{1}{IL}\left(S^2_{BC} - S^2_{R}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{ABC}} = \frac{1}{L}\left(S^2_{ABC} - S^2_{R}\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S^2_R.
\end{aligned}$$

où $S^2_B = \dfrac{SC_B}{n_B}$, $S^2_C = \dfrac{SC_C}{n_C}$, $S^2_{AB} = \dfrac{SC_{AB}}{n_{AB}}$, $S^2_{AC} = \dfrac{SC_{AC}}{n_{AC}}$, $S^2_{BC} = \dfrac{SC_{BC}}{n_{BC}}$, $S^2_{ABC} = \dfrac{SC_{ABC}}{n_{ABC}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[13].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{ABC}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, σ^2_B, σ^2_C, σ^2_{AB}, σ^2_{AC}, σ^2_{BC}, σ^2_{ABC}, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\sigma^2_B}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IKL}\left(s^2_B - s^2_{BC}\right),\ \widehat{\sigma^2_C}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IJL}\left(s^2_C - s^2_{BC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AB}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{KL}\left(s^2_{AB} - s^2_{ABC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{AC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{JL}\left(s^2_{AC} - s^2_{ABC}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{BC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{IL}\left(s^2_{BC} - s^2_{R}\right),\\
&\widehat{\sigma^2_{ABC}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{L}\left(s^2_{ABC} - s^2_{R}\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

---

[13] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Chapitre 6

Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés

Dans tout ce chapitre, nous utilisons les notations définies à la section Notations, page xi..

Nous sommes dans la situation particulière, semblable à celle du chapitre 4, où les effets des niveaux du facteur B n'ont pas de signification concrète, par exemple ces niveaux dépendent du niveau du facteur A considéré et une étude des effets principaux du facteur B n'a pas de pertinence. Nous compliquons la situation en rajoutant un niveau d'imbrication par rapport aux modèles exposés au chapitre 4. Ainsi le facteur C est emboîté dans le facteur B qui lui même est emboîté dans le facteur A.
Un tel plan d'expérience est dit complètement hiérarchisé ou totalement emboîté[1]. Il n'est utilisable que si nous disposons de répétitions. Dans le cas contraire où les essais ne seraient pas répétés, l'effet dû au facteur C ne pourra être étudié et le modèle que nous devrons utiliser pour étudier les données sera l'un de ceux exposés au chapitre 4.
Pour signaler cette situation particulière, nous notons les effets du facteur B par $\beta_{j(i)}$ et ceux du facteur C par $\gamma_{k(j(i))}$.

6.1. Modèles à effets fixes

6.1.1. Avec répétitions

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles dépendant du niveau A_i du facteur A et étant alors notée $B_{j(i)}$. Un facteur contrôlé C se présente sous K modalités, chacune d'entre elles dépendant du niveau $B_{j(i)}$ du facteur B et donc du niveau A_i du facteur A et étant alors notée $C_{k(j(i))}$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

---

[1] en anglais *completely nested model* ou *completely hierarchical model.*

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(j(i))} + \epsilon_{i,j,k,l},$$
$$i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \beta_{j(i)} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, I\},$$
$$\text{et } \sum_{k=1}^{K} \gamma_{k(j(i))} = 0,\ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, I\} \times \{1, \ldots, J\},$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ lors du $l-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p)$$
$$\text{avec } 1 \leqslant i, m \leqslant I,\ 1 \leqslant j, n \leqslant J,\ 1 \leqslant k, o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l, p \leqslant L.$$

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous regroupons les valeurs que peut prendre la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ lors des L essais dans le tableau 6.1.

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur A est définie par :

$$SC_A = JKL \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons que la variation théorique due au facteur B dans A est définie par :

$$SC_{B|A} = KL \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation théorique due au facteur C dans B qui lui-même est emboîté dans A est définie par :

$$SC_{C|B|A} = L \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{i,j,k,\bullet} - Y_{i,j,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle théorique est quant à elle définie par :

$$SC_R = L \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{i,j,k,l} - Y_{i,j,k,\bullet})^2.$$

A_1							$\dots$			A_I						
$B_{1(1)}$			$\dots$	$B_{J(1)}$			$\dots$	$\dots$	$\dots$	$B_{1(I)}$			$\dots$	$B_{J(I)}$		
$C_{1(1(1))}$	$\dots$	$C_{K(1(1))}$	$\dots$	$C_{1(J(1))}$	$\dots$	$C_{K(J(1))}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$C_{1(1(I))}$	$\dots$	$C_{K(1(I))}$	$\dots$	$C_{1(J(I))}$	$\dots$	$C_{K(J(I))}$
$Y_{1,1,1,1}$	$\dots$	$Y_{1,1,K,1}$	$\dots$	$Y_{1,J,1,1}$	$\dots$	$Y_{1,J,K,1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$Y_{I,1,1,1}$	$\dots$	$Y_{I,1,K,1}$	$\dots$	$Y_{I,J,1,1}$	$\dots$	$Y_{I,J,K,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1,1,1,L}$	$\dots$	$Y_{1,1,K,L}$	$\dots$	$Y_{1,J,1,L}$	$\dots$	$Y_{1,J,K,L}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$Y_{I,1,1,L}$	$\dots$	$Y_{I,1,K,L}$	$\dots$	$Y_{I,J,1,L}$	$\dots$	$Y_{I,J,K,L}$

TABLE 6.1 – Représentation des variables aléatoires de réponse en fonction des niveaux des trois facteurs d'un plan complètement emboîté

A_1							$\dots$			A_I						
$B_{1(1)}$			$\dots$	$B_{J(1)}$			$\dots$	$\dots$	$\dots$	$B_{1(I)}$			$\dots$	$B_{J(I)}$		
$C_{1(1(1))}$	$\dots$	$C_{K(1(1))}$	$\dots$	$C_{1(J(1))}$	$\dots$	$C_{K(J(1))}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$C_{1(1(I))}$	$\dots$	$C_{K(1(I))}$	$\dots$	$C_{1(J(I))}$	$\dots$	$C_{K(J(I))}$
$y_{1,1,1,1}$	$\dots$	$y_{1,1,K,1}$	$\dots$	$y_{1,J,1,1}$	$\dots$	$y_{1,J,K,1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$y_{I,1,1,1}$	$\dots$	$y_{I,1,K,1}$	$\dots$	$y_{I,J,1,1}$	$\dots$	$y_{I,J,K,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{1,1,1,L}$	$\dots$	$y_{1,1,K,L}$	$\dots$	$y_{1,J,1,L}$	$\dots$	$y_{1,J,K,L}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$y_{I,1,1,L}$	$\dots$	$y_{I,1,K,L}$	$\dots$	$y_{I,J,1,L}$	$\dots$	$y_{I,J,K,L}$

TABLE 6.2 – Représentation de la liste de données expérimentales $\boldsymbol{y}$ en fonction des niveaux des trois facteurs d'un plan complètement emboîté

Enfin la variation totale théorique est égale à :

$$SC_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(Y_{i,j,k,l} - Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$SC_{TOT} = SC_A + SC_{B|A} + SC_{C|B|A} + SC_R.$$

La liste $\boldsymbol{y}$ des données expérimentales $y_{1,1,1,1}, \ldots, y_{1,1,1,L}, \ldots, y_{I,1,1,1}, \ldots, y_{I,1,1,L}, y_{1,2,1,1}, \ldots, y_{I,J,1,L}, y_{1,1,2,1}, \ldots, y_{I,J,K,L}$ permet de construire le tableau 6.2 qui est une réalisation du tableau 6.1.

La variation due au facteur A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_A = JKL\sum_{i=1}^{I}(y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur B dans A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{B|A} = KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation due au facteur C dans B qui lui même est dans A observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est définie par :

$$sc_{C|B|A} = L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,j,k,\bullet} - y_{i,j,\bullet,\bullet})^2.$$

La variation résiduelle observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est quant à elle définie par :

$$sc_R = L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{i,j,k,l} - y_{i,j,k,\bullet})^2.$$

Enfin la variation totale observée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$ est égale à :

$$sc_{TOT} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}(y_{i,j,k,l} - y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet})^2.$$

La relation fondamentale de l'ANOVA reste valable lorsqu'elle est évaluée sur la liste de données $\boldsymbol{y}$:

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_{B|A} + sc_{C|B|A} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Facteur C dans B	$n_{C\|B\|A} = IJ(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJKL - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C dans B	$sc_{C\|B\|A}$	$n_{C\|B\|A}$	$s_{C\|B\|A}^2 = \dfrac{sc_{C\|B\|A}}{n_{C\|B\|A}}$	$f_{C\|B\|A} = \dfrac{s_{C\|B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \gamma_{1(1(1))} = \gamma_{2(1(1))} = \cdots = \gamma_{K(1(1))} = \gamma_{1(1(2))} = \cdots = \gamma_{K(J(I))} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \exists\ (i_0, j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \mid \gamma_{k_0(j_0(i_0))} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C dans B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{C|B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{C|B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_{1(1)}}$, …, $\widehat{\beta_{J(I)}}$, $\widehat{\gamma_{1(1(1))}}$, …, $\widehat{\gamma_{K(J(I))}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\beta_{1(1)}$, …, $\beta_{J(I)}$, $\gamma_{1(1(1))}$, …, $\gamma_{K(J(I))}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
\widehat{\alpha_i} &= Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
\widehat{\beta_{j(i)}} &= Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\widehat{\gamma_{k(j(i))}} &= Y_{i,j,k,\bullet} - Y_{i,j,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S_R^2.
\end{aligned}$$

Ce sont des estimateurs sans biais[2].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_{1(1)}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\beta_{J(I)}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\gamma_{1(1(1))}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\gamma_{K(J(I))}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\beta_{1(1)}$, …, $\beta_{J(I)}$, $\gamma_{1(1(1))}$, …, $\gamma_{K(J(I))}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) &= y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
\widehat{\beta_{j(i)}}(\boldsymbol{y}) &= y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
\widehat{\gamma_{k(j(i))}}(\boldsymbol{y}) &= y_{i,j,k,\bullet} - y_{i,j,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\\
\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

---

[2] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

6.2. Modèles à effets aléatoires

6.2.1. Avec répétitions

Les α_i représentent un échantillon de taille I prélevé dans une population importante. Nous admettrons que les effets des A_i, les α_i, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance σ_A^2. Les $\beta_{j(i)}$ représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante dépendant du niveau A_i du facteur A. Nous admettrons que les effets des $B_{j(i)}$, les $\beta_{j(i)}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma^2_{B|A}$. Les $\gamma_{k(j(i))}$ représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante dépendant du niveau $B_{j(i)}$ du facteur B et donc du niveau A_i du facteur A. Nous admettrons que les effets des $C_{k(j(i))}$, les $\gamma_{k(j(i))}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma^2_{C|B|A}$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered} Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(j(i))} + \epsilon_{i,j,k,l}, \\ i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L, \end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\left(\alpha_i\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_A^2),\ \forall\ i, 1 \leqslant i \leqslant I, \\ \mathcal{L}\left(\beta_{j(i)}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{B|A}),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J, \\ \mathcal{L}\left(\gamma_{k(j(i))}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2_{C|B|A}),\ \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, $\beta_{j(i)}$, et $\gamma_{k(j(i))}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered} \forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2), \\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p) \\ \text{avec } 1 \leqslant i,m \leqslant I,\ 1 \leqslant j,n \leqslant J,\ 1 \leqslant k,o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l,p \leqslant L, \end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires α_i, $\beta_{j(i)}$, et $\gamma_{k(j(i))}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, $sc_{B|A}$, $sc_{C|B|A}$, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 6.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_{B|A} + sc_{C|B|A} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Facteur C dans B	$n_{C\|B\|A} = IJ(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJKL - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_{C\|B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Facteur C dans B	$sc_{C\|B\|A}$	$n_{C\|B\|A}$	$s_{C\|B\|A}^2 = \dfrac{sc_{C\|B\|A}}{n_{C\|B\|A}}$	$f_{C\|B\|A} = \dfrac{s_{C\|B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'''$ ou $\mathcal{H}_1'''$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1' : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_{B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma^2_{B|A} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C dans B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{C|B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{C|B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma^2_A}$, $\widehat{\sigma^2_{B|A}}$, $\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}$, $\widehat{\sigma^2}$ du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y}, \\
\widehat{\sigma^2_A} &= \frac{1}{JKL}\left(S^2_A - S^2_{B|A}\right), \\
\widehat{\sigma^2_{B|A}} &= \frac{1}{KL}\left(S^2_{B|A} - S^2_{C|B|A}\right), \\
\widehat{\sigma^2_{C|B|A}} &= \frac{1}{L}\left(S^2_{C|B|A} - S^2_R\right), \\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S^2_R,
\end{aligned}$$

où $S^2_A = \dfrac{SC_A}{n_A}$, $S^2_{B|A} = \dfrac{SC_{B|A}}{n_{B|A}}$, $S^2_{C|B|A} = \dfrac{SC_{C|B|A}}{n_{C|B|A}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[3].

---

[3] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{B|A}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma_{C|B|A}^2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, σ_A^2, $\sigma_{B|A}^2$, $\sigma_{C|B|A}^2$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
\widehat{\sigma_A^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{JKL}\left(s_A^2 - s_{B|A}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{B|A}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{KL}\left(s_{B|A}^2 - s_{C|B|A}^2\right),\\
\widehat{\sigma_{C|B|A}^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{L}\left(s_{C|B|A}^2 - s_R^2\right),\\
\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s_R^2.
\end{aligned}$$

6.3. Modèles à effets mixtes

6.3.1. Avec répétitions

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes et un facteur est à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Un facteur contrôlé B se présente sous J modalités, chacune d'entre elles dépendant du niveau A_i du facteur A et étant alors notée $B_{j(i)}$. Nous admettrons que les effets des $C_{k(j(i))}$, les $\gamma_{k(j(i))}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma_{C|B|A}^2$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(j(i))} + \epsilon_{i,j,k,l},\\
i = 1\ldots I,\ j = 1\ldots J,\ k = 1\ldots K,\ l = 1\ldots L,\\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I}\alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{J}\beta_{j(i)} = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,I\},
\end{gathered}$$

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\mathcal{L}\left(\gamma_{k(j(i))}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_{C|B|A}^2),\ \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires $\gamma_{k(j(i))}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}
\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),\\
\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p)\\
\text{avec } 1 \leqslant i,m \leqslant I,\ 1 \leqslant j,n \leqslant J,\ 1 \leqslant k,o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l,p \leqslant L,
\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires $\gamma_{k(j(i))}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, $sc_{B|A}$, $sc_{C|B|A}$, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 6.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_{B|A} + sc_{C|B|A} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Facteur C dans B	$n_{C\|B\|A} = IJ(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJKL - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{C\|B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0'$ ou $\mathcal{H}_1'$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_{C\|B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0''$ ou $\mathcal{H}_1''$
Facteur C dans B	$sc_{C\|B\|A}$	$n_{C\|B\|A}$	$s_{C\|B\|A}^2 = \dfrac{sc_{C\|B\|A}}{n_{C\|B\|A}}$	$f_{C\|B\|A} = \dfrac{s_{C\|B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0'''$ ou $\mathcal{H}_1'''$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C dans B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{C|B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{C|B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\beta_{1(1)}}$, …, $\widehat{\beta_{J(I)}}$, $\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\beta_{1(1)}$, …, $\beta_{J(I)}$, $\sigma^2_{C|B|A}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} = Y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
&\widehat{\alpha_i} = Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_{j(i)}} = Y_{i,j,\bullet,\bullet} - Y_{i,\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{C|B|A}} = \frac{1}{L}\left(S^2_{C|B|A} - S^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2} = \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S^2_R,
\end{aligned}$$

où $S^2_{C|B|A} = \dfrac{SC_{C|B|A}}{n_{C|B|A}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[4].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\beta_{1(1)}}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\beta_{J(I)}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\beta_{1(1)}$, …, $\beta_{J(I)}$, $\sigma^2_{C|B|A}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
&\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = y_{i,\bullet,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
&\widehat{\beta_{j(i)}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet,\bullet} - y_{i,\bullet,\bullet,\bullet},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\
&\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{L}\left(s^2_{C|B|A} - s^2_R\right),\\
&\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) = \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Un facteur contrôlé A se présente sous I modalités, chacune d'entre elles étant notée A_i. Les $\beta_{j(i)}$ représentent un échantillon de taille J prélevé dans une population importante dépendant du niveau A_i du facteur A. Nous admettrons que les effets des $B_{j(i)}$, les $\beta_{j(i)}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma^2_{B|A}$. Les $\gamma_{k(j(i))}$ représentent un échantillon de taille K prélevé dans une population importante dépendant du niveau $B_{j(i)}$ du facteur B et donc du niveau A_i du facteur A. Nous admettrons que les effets des $C_{k(j(i))}$, les $\gamma_{k(j(i))}$, sont distribués suivant une loi normale centrée de variance $\sigma^2_{C|B|A}$. Pour chacun des couples de modalités $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ nous effectuons $L \geqslant 2$ mesures d'une réponse Y qui est une variable continue. Nous notons $n = I \times J \times K \times L$ le nombre total de mesures ayant été effectuées.

Nous introduisons le modèle :

$$\begin{gathered}
Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(j(i))} + \epsilon_{i,j,k,l},\\
i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,\ k = 1 \ldots K,\ l = 1 \ldots L,\\
\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,
\end{gathered}$$

---

[4] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

où $Y_{i,j,k,l}$ est la valeur prise par la réponse Y dans les conditions $(A_i, B_{j(i)}, C_{k(j(i))})$ lors du $l-$ème essai. Nous supposons que :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\beta_{j(i)}\right) &= \mathcal{N}(0, \sigma^2_{B|A}),\ \forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\\ \mathcal{L}\left(\gamma_{k(j(i))}\right) &= \mathcal{N}(0, \sigma^2_{C|B|A}),\ \forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\end{aligned}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires $\beta_{j(i)}$, et $\gamma_{k(j(i))}$.
Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\begin{gathered}\forall\ (i,j,k,l), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ 1 \leqslant k \leqslant K,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),\\ \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p)\\ \text{avec } 1 \leqslant i,m \leqslant I,\ 1 \leqslant j,n \leqslant J,\ 1 \leqslant k,o \leqslant K \text{ et } 1 \leqslant l,p \leqslant L,\end{gathered}$$

ainsi que l'indépendance des effets aléatoires $\beta_{j(i)}$, et $\gamma_{k(j(i))}$ et des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$.

Nous supposons que les conditions d'utilisation de ce modèle sont bien remplies, l'étude de leur vérification fait l'objet d'un paragraphe du chapitre 12.

Nous utilisons les quantités sc_A, $sc_{B|A}$, $sc_{C|B|A}$, sc_R et sc_{TOT} introduites à la section 6.1.1.

Nous rappelons la relation fondamentale de l'ANOVA :

$$sc_{TOT} = sc_A + sc_{B|A} + sc_{C|B|A} + sc_R.$$

Nous introduisons les degrés de liberté (Ddl) associés à chaque ligne du tableau de l'ANOVA :

Source	Degrés de liberté
Facteur A	$n_A = I - 1$
Facteur B dans A	$n_{B\|A} = I(J-1)$
Facteur C dans B	$n_{C\|B\|A} = IJ(K-1)$
Résiduelle	$n_R = IJK(L-1)$
Totale	$n_{TOT} = IJKL - 1$

Nous résumons ces informations dans le tableau de l'ANOVA ci-dessous :

Source	Variation	Ddl	Carré Moyen	F	Décision
Facteur A	sc_A	n_A	$s_A^2 = \dfrac{sc_A}{n_A}$	$f_A = \dfrac{s_A^2}{s_{B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0^{'}$ ou $\mathcal{H}_1^{'}$
Facteur B dans A	$sc_{B\|A}$	$n_{B\|A}$	$s_{B\|A}^2 = \dfrac{sc_{B\|A}}{n_{B\|A}}$	$f_{B\|A} = \dfrac{s_{B\|A}^2}{s_{C\|B\|A}^2}$	$\mathcal{H}_0^{''}$ ou $\mathcal{H}_1^{''}$
Facteur C dans B	$sc_{C\|B\|A}$	$n_{C\|B\|A}$	$s_{C\|B\|A}^2 = \dfrac{sc_{C\|B\|A}}{n_{C\|B\|A}}$	$f_{C\|B\|A} = \dfrac{s_{C\|B\|A}^2}{s_R^2}$	$\mathcal{H}_0^{'''}$ ou $\mathcal{H}_1^{'''}$
Résiduelle	sc_R	n_R	$s_R^2 = \dfrac{sc_R}{n_R}$		
Totale	sc_{TOT}	n_{TOT}			

Nous souhaitons faire les tests d'hypothèse suivants :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ précédente d'absence d'effet du facteur A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, f_A est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I - 1$ et $I(J - 1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur f_A est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table. Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est rejetée, nous pouvons procéder à des comparaisons multiples des différents effets des niveaux du facteur voir le chapitre 9.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma_{B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ précédente d'absence d'effet du facteur B dans A et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \sigma^2_{C|B|A} \neq 0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ précédente d'absence d'effet du facteur C dans B et lorsque les conditions de validité du modèle sont respectées, $f_{C|B|A}$ est la réalisation d'une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Nous concluons alors à l'aide de la $p-$valeur, rejet si elle est inférieure ou égale au seuil α du test, ou à l'aide d'une table, rejet si la valeur $f_{C|B|A}$ est supérieure ou égale à la valeur critique issue de la table.

Les estimateurs $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha_1}$, …, $\widehat{\alpha_I}$, $\widehat{\sigma^2_{B|A}}$, $\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}$, $\widehat{\sigma^2}$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\sigma^2_{B|A}$, $\sigma^2_{C|B|A}$, σ^2 du modèle sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= Y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{Y},\\
\widehat{\alpha_i} &= Y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu},\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
\widehat{\sigma^2_{B|A}} &= \frac{1}{KL}\left(S^2_{B|A} - S^2_{C|B|A}\right),\\
\widehat{\sigma^2_{C|B|A}} &= \frac{1}{L}\left(S^2_{C|B|A} - S^2_R\right),\\
\widehat{\sigma^2} &= \frac{SC_R}{IJK(L-1)} = S^2_R,
\end{aligned}$$

où $S^2_{B|A} = \dfrac{SC_{B|A}}{n_{B|A}}$, $S^2_{C|B|A} = \dfrac{SC_{C|B|A}}{n_{C|B|A}}$ et $S^2_R = \dfrac{SC_R}{n_R}$.
Ce sont des estimateurs sans biais[5].

Les estimations, obtenues pour la liste de données $\boldsymbol{y}$ et notées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, …, $\widehat{\alpha_I}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{B|A}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y})$ des paramètres μ, α_1, …, α_I, $\sigma^2_{B|A}$, $\sigma^2_{C|B|A}$, σ^2 du modèle se déduisent des formules ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) &= y_{\bullet,\bullet,\bullet} = \overline{y},\\
\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) &= y_{i,\bullet,\bullet} - \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}),\ 1 \leqslant i \leqslant I,\\
\widehat{\sigma^2_{B|A}}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{KL}\left(s^2_{B|A} - s^2_{C|B|A}\right),\\
\widehat{\sigma^2_{C|B|A}}(\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{L}\left(s^2_{C|B|A} - s^2_R\right),\\
\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{y}) &= \frac{sc_R}{IJK(L-1)} = s^2_R.
\end{aligned}$$

---

[5] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13.

Chapitre 7

Analyse de la variance à trois facteurs partiellement emboîtés

7.1. Introduction

Un modèle d'analyse de la variance est dit partiellement emboîté ou partiellement hiérarchisé si, contrairement aux modèles complètement emboîtés présentés aux chapitres 4 et 6, ce modèle fait intervenir certaines interactions. Nous remarquons que pour qu'un modèle soit partiellement emboîté, il doit contenir au moins trois facteurs. Ce type de modèle nécessite généralement des répétitions, ceci sera précisé au cas par cas pour chacun des modèles exposés.

À nouveau chacun des facteurs peut être à effets fixes ou à effets aléatoires à condition de respecter les deux règles suivantes :

1. Toute interaction mettant en jeu un facteur à effets aléatoires est à effets aléatoires.
2. Tout terme emboîté dans un facteur à effets aléatoires est à effets aléatoires.

À cause de la grande multiplicité des modèles que nous pouvons obtenir ainsi, nous nous bornerons à exposer ci-dessous les équations des différents modèles comportant trois facteurs et partiellement emboîtés qu'il est possible de construire.

Il est commode d'utiliser une représentation graphique pour améliorer la compréhension des modèles partiellement emboîtés. Pour plus de détails sur ce type de schéma, nous renvoyons le lecteur à [Dag98b].

7.2. Les différents modèles partiellement emboîtés

7.2.1. Nécessitant des répétitions

Il s'agit du cas où le troisième facteur C est emboîté dans les différents termes d'un modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs comportant les facteurs A et B.

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \gamma_{k|(i,j)} + \epsilon_{i,j,k,l}$$

avec les hypothèses de rigueur associées au fait que nous considérons que les facteurs sont à effets aléatoires ou à effets fixes, les conditions habituelles sur les lois, les variances et l'indépendance des erreurs $\epsilon_{i,j,k,l}$ et $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant l \leqslant L$.

Pour illustrer les deux règles exposées à la fin de la section 7.1 concernant les effets fixes ou aléatoires, nous détaillons les différentes déclinaisons de modèles que nous pouvons considérer dans la situation de ce paragraphe :

- Tous les facteurs, A, B et C, sont à effets fixes.
- Les facteurs A et B sont à effets fixes, le facteur emboîté C est à effets aléatoires.
- L'un des facteurs, A ou B, est à effets aléatoires. Puisque ces deux facteurs jouent un rôle symétrique dans la définition du modèle, nous supposons que le facteur A est à effets fixes et que c'est le facteur B qui est à effets aléatoires. Alors **nécessairement** nous devons considérer que le facteur C, qui est emboîté dans le facteur B, est à effets aléatoires. De plus le terme d'interaction de A et de B doit aussi être **nécessairement** considéré comme à effets aléatoires. Ainsi seuls les termes $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ associés aux effets du facteur A sont fixes.
- Les effets des deux facteurs A et B sont aléatoires et de ce fait C doit être nécessairement considéré comme un facteur à effets aléatoires : tous les facteurs du modèles sont à effets aléatoires.

7.2.2. Ne nécessitant pas de répétitions

Deux facteurs croisés B et C sont emboîtés dans un facteur A

Il s'agit du cas où les différents termes d'un modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs comportant les facteurs B et C sont emboîtés dans un facteur A.

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_{j|i} + \gamma_{k|i} + (\beta\gamma)_{(j,k)|i} + \epsilon_{i,j,k,l}$$

avec les hypothèses de rigueur associées au fait que nous considérons que les facteurs sont à effets aléatoires ou à effets fixes, les conditions habituelles sur les lois, les variances et l'indépendance des erreurs et $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant l \leqslant L$. Dans le cas, nous pouvons avoir le nombre de répétitions, L, égal à un, c'est-à-dire que nous pouvons utiliser un plan d'expérience ne comportant pas de répétitions.

Pour illustrer les deux règles exposées à la fin de la section 7.1 concernant les effets fixes ou aléatoires, nous détaillons les différentes déclinaisons de modèles que nous pouvons considérer dans la situation de ce paragraphe :

- Tous les facteurs, A, B et C, sont à effets fixes.
- Le facteur A est à effets aléatoires et de ce fait les facteurs B et C, qui sont emboîtés dans A, sont **nécessairement** à effets aléatoires.
- L'un des facteurs B ou C est à effets aléatoires et de ce fait l'interaction entre B et C est **nécessairement** à effets aléatoires.

- Tous les facteurs sont à effets aléatoires.

Une situation plus complexe
Il s'agit du cas où le troisième facteur C est emboîté dans le facteur B, qui lui-même est croisé avec le facteur A.

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k|j} + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k|j} + \epsilon_{i,j,k,l}$$

avec les hypothèses de rigueurs associées au fait que nous considérons que les facteurs sont aléatoires ou fixes, les conditions habituelles sur les lois, les variances et l'indépendance des erreurs et $1 \leqslant i \leqslant I$, $1 \leqslant j \leqslant J$, $1 \leqslant k \leqslant K$, $1 \leqslant l \leqslant L$. Dans ce cas, nous pouvons avoir un nombre de répétitions, L, égal à un, c'est-à-dire que nous pouvons utiliser un plan d'expérience ne comportant pas de répétitions puis l'analyser à l'aide de ce modèle.

Pour illustrer les deux règles exposées à la fin de la section 7.1 concernant les facteurs à effets fixes ou aléatoires, nous détaillons les différentes déclinaisons de modèles que nous pouvons considérer dans la situation de ce paragraphe :

- Tous les facteurs, A, B et C, sont à effets fixes.
- Si le facteur B est à effets aléatoires, le facteur C l'est aussi **nécessairement** puisque ce facteur est emboîté dans le facteur B. Il en va de même de l'interaction entre le facteur A et le facteur B.
- Le facteur A est à effets aléatoires. **Nécessairement** ses interactions avec les facteurs B et C sont à effets aléatoires.
- Si le facteur C est à effets aléatoires, son interaction avec le facteur A est **nécessairement** à effets aléatoires.

Chapitre 8

Analyse de la variance à l facteurs croisés, partiellement ou totalement emboîtés, $l \geqslant 3$

Nous donnons dans ce chapitre quelques règles générales qui étendent les indications qui ont été exposées, aux chapitres 2, 3, 4, 5, 6, 7, dans les cas où nous avions deux ou trois facteurs et dont le domaine de validité est en fait celui de l'analyse de la variance à l facteurs.

1. Si le plan d'expérience ne comporte pas de répétitions, il sera impossible d'estimer l'interaction d'ordre $l-1$[1] entre les facteurs mais toutes les interactions d'ordre inférieur ou égal à $l-2$ pourront être estimées et donc la significativité de leur influence pourra être testée si nous faisons justement l'hypothèse que l'interaction d'ordre $l-1$ est négligeable.
2. Si le plan comporte des répétitions, nous pouvons utiliser un modèle incluant jusqu'à l'interaction d'ordre l entre les facteurs.
3. Si le plan d'expérience ne comporte pas de répétitions, il sera impossible d'utiliser un modèle totalement emboîté. Nous pourrons néanmoins nous servir de certains types de modèles partiellement emboîtés.
4. Si le plan comporte des répétitions, nous pouvons utiliser un modèle totalement emboîté.
5. Nous pouvons comme dans les chapitres 2, 3, 5 utiliser des modèles dont certains des facteurs sont à effets aléatoires et d'autres à effets fixes.
6. Lorsque les facteurs dont nous cherchons à tester l'influence sont en présence d'un facteur à effets aléatoires, il faudra peut-être utiliser l'approximation de Satterthwaite. Il en va de même pour certaines interactions. Les tests associés ne seront pas basés sur une statistique qui suit exactement une loi de Fisher.
7. Toute interaction mettant en jeu un facteur à effets aléatoires est **nécessairement** considérée comme un terme du modèle à effets aléatoires.

---

[1] Il existe un test, le test de Tukey, permettant de s'intéresser à la question de la significativité de l'interaction d'ordre $l-1$ lorsque le plan comporte l facteurs sans répétition. Lorsque qu'une telle interaction n'est pas négligeable, nous devons recourir à une transformation afin d'essayer de limiter son effet. En effet, les statistiques des tests dont nous nous servons sont exactes sous l'hypothèse que l'interaction d'ordre $l-1$ est nulle. Pour un exposé de ce test, nous renvoyons au livre [Dag98b].

8. Dans le cas où nous souhaitons utiliser un modèle totalement emboîté ou partiellement emboîté, tout terme du modèle emboîté dans un facteur à effets aléatoires est **nécessairement** considéré comme un terme à effets aléatoires.
9. Il existe une très grande variété de modèles partiellement emboîtés, d'autant plus importante que le nombre de facteurs du modèle, l, est élevé. Nous rappelons qu'il est commode d'utiliser une représentation graphique pour améliorer la compréhension des modèles partiellement emboîtés. Pour plus de détails sur ce type de schéma, nous conseillons au lecteur de consulter [Dag98b]. Par exemple il existe 48 modèles differents partiellement emboîtés lorsque nous considérons un modèle d'analyse de la variance à quatre facteurs et en présence de répétitions. Nous renvoyons à nouveau le lecteur vers le livre [Dag98b] s'il souhaite obtenir des informations complémentaires.

Chapitre 9

Comparaisons multiples

9.1. Contrastes

9.1.1. Définition

Pour introduire la notion de contraste, nous considérons le cas d'un modèle d'analyse de la variance pour un facteur A à effets fixes. Nous notons A_i, pour $1 \leqslant i \leqslant I$ les modalités contrôlées du facteur A et α_i les effets de ces différentes modalités, toujours pour $1 \leqslant i \leqslant I$.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots I,\ j = 1 \ldots J,$$
$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition A_i lors de la $j-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I, \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J.$$

Nous appelons **contraste** L des I moyennes $\mu_1, \ldots, \mu_I$ la somme :

$$L = l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + \ldots + l_I\mu_I,$$

où $l_1, \ldots, l_I$ sont I nombres réels tels que $\sum_i^I l_i = 0$ et $\mu_1 = \mu + \alpha_1, \ldots, \mu_I = \mu + \alpha_I$ sont tels que $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ sont les I différents effets des I niveaux du facteur A.

Les expressions suivantes sont des exemples de contrastes :

$$\mu_1 - \mu_3, \text{un tel contraste permettra par exemple de comparer } \mu_1 \text{ et } \mu_3.$$
$$\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3, \text{un tel contraste permettra par exemple de comparer } \mu_1 + \mu_3 \text{ et } 2\mu_2.$$

9.1.2. Orthogonalité

Nous considérons deux contrastes L_1 et L_2 :

$$L_1 = l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + \ldots + l_I\mu_I$$

et

$$L_2 = l_1^{'}\mu_1 + l_2^{'}\mu_2 + \ldots + l_I^{'}\mu_I.$$

Nous avons donc les relations $l_1, \ldots, l_I$ sont I nombres réels tels que $\sum_i^I l_i = 0$ et $l_1^{'}, \ldots, l_I^{'}$ sont I nombres réels tels que $\sum_i^I l_i^{'} = 0$, $\mu_1 = \mu + \alpha_1, \ldots, \mu_I = \mu + \alpha_I$ sont tels que $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ sont les I différents effets des I niveaux du facteur A.

L_1 et L_2 sont des contrastes dits **orthogonaux** si la relation suivante est vérifiée :

$$l_1 l_1^{'} + l_2 l_2^{'} + \ldots + l_I l_I^{'} = 0.$$

Par exemple, les deux contrastes suivant sont des contrastes orthogonaux :

$$\begin{aligned} L_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\ L_2 &= \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4. \end{aligned}$$

9.1.3. Estimation

Soit L un contraste. Un estimateur sans biais[1] $\widehat{L}$ de L est obtenu de la manière suivante :

$$\widehat{L} = l_1\widehat{\mu_1} + l_2\widehat{\mu_2} + \ldots + l_I\widehat{\mu_I},$$

où $\widehat{\mu_i} = \widehat{\mu + \alpha_i} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha_i}$, avec $1 \leqslant i \leqslant I$.

La somme des carrés associée à l'estimateur $\widehat{L}$ du contraste L est définie par :

$$SC_{\widehat{L}} = J\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i\widehat{\mu_i}\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i^2}.$$

Si le nombre de répétitions diffère d'un niveau A_i du facteur A à l'autre, en notant n_i le nombre de répétitions pour la modalité A_i, nous obtenons la formule suivante :

$$SC_{\widehat{L}} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i\widehat{\mu_i}\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{l_i^2}{n_i}}.$$

---

[1] La notion de biais d'un estimateur est définie dans le chapitre 13

9.1.4. Test d'une hypothèse impliquant un constraste

Pour le modèle considéré de l'analyse de la variance à un facteur, les estimateurs $Y_{i,\bullet}$ des μ_i sont indépendants, même si le plan n'est pas équilibré. Ainsi la variance de l'estimateur $\widehat{L}$ du contraste L est égale à :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right] &= \sum_{i=1}^{I}\left(l_i^2 \mathrm{Var}\left[Y_{i,\bullet}\right]\right)\\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}.\end{aligned}$$

Un estimateur sans biais de cette variance est alors :

$$\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]} = s_R^2 \sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}.$$

Les hypothèses du modèle utilisé impliquent alors que, puisque $\widehat{L}$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires qui suivent une loi normale et qui sont indépendantes, l'estimateur $\widehat{L}$ suit aussi une loi normale. De ce fait :

$$\frac{\widehat{L}-L}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}} \sim t_{n-I},$$

où t_{n-I} est la loi de Student à $n-I$ degrés de liberté.

Remarque :

$\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}$ n'est pas un estimateur sans biais de $\sqrt{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}$. Il est possible de corriger le biais de cet estimateur en posant $\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}_{\text{corrigé}}$ défini par :

$$\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}_{\text{corrigé}} = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}},$$

où Γ est une fonction classique en mathématiques définie à l'aide d'une intégrale.

Néanmoins l'obtention d'un intervalle de confiance reste délicate puisque la loi de cet estimateur n'est pas classique. P. Chapouille, dans son livre [Cha73], propose la formule approximative :

$$\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}_{\text{corrigé}} \approx \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}\sqrt{\frac{2n-2}{2n-3}} \approx \sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}\left(1+\frac{1}{4n-6}\right).$$

Nous perdons alors la propriété ci-dessous qui permet de connaître la loi de la statistique

$$\frac{\widehat{L}-L}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left[\widehat{L}\right]}}},$$

c'est pourquoi nous préférons utiliser l'estimateur biaisé $\sqrt{\widehat{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}}$ à la place de l'estimateur sans biais $\sqrt{\widehat{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}_{\text{corrigé}}}$ lorsque nous cherchons à obtenir une estimation par intervalle de $\sqrt{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}$ et à la rigueur nous nous servirions de $\sqrt{\widehat{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}_{\text{corrigé}}}$ pour obtenir une estimation ponctuelle de $\sqrt{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}$ avec la réserve qu'une estimation par intervalle est beaucoup plus intéressante qu'une simple estimation ponctuelle d'un paramètre et lui doit être systématiquement préférée lorsque c'est possible.

Le résultat ci-dessus sur la loi de $\dfrac{\widehat{L}-L}{\sqrt{\widehat{\text{Var}\left[\widehat{L}\right]}}}$ permet de déterminer un intervalle de confiance de niveau $100(1-\alpha)$ % pour la valeur du contraste L.

Nous nous donnons désormais un nombre réel L_0 et nous souhaitons tester l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : L = L_0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : L \neq L_0.}$$

Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et les hypothèses du modèle,

$$l = \frac{\widehat{L}(\boldsymbol{y}) - L_0}{\sqrt{s_R^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{l_i^2}{n_i}}}$$

est une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de Student à $n-I$ degrés de liberté. En comparant la valeur l calculée à l'aide de l'échantillon à la valeur critique au seuil α pour une loi de Student à $n-I$ degrés de liberté nous pouvons décider de la significativité du test. Certains logiciels peuvent vous fournir directement la $p-$valeur associée au test d'un contraste ce qui permet également de conclure quant à la significativité du test.

9.2. Comparaisons multiples sous l'hypothèse d'homoscédasticité

Dans le paragraphe 9.1 ci-dessus, nous nous sommes intéressés au test **d'une seule hypothèse** concernant les effets des niveaux du facteur A. Le contexte des tests de comparaisons multiples[2] est radicalement différent puisque nous cherchons à comparer tous les effets des niveaux A_i du facteur A entre eux ou avec un niveau de référence dit de contrôle. Nous devons ainsi réaliser $I(I-1)/2$ comparaisons dans la première situation ou $I-1$ comparaisons dans la seconde situation où nous comparons les effets à un niveau de contrôle.

---

[2] Ces tests sont souvent appelés *post-hoc tests* ou *multiple comparisons tests* en anglais.

Tester l'égalité des effets de deux niveaux A_i et A_j, $i \neq j$, d'un facteur A revient à tester la nullité du contraste $L = \mu_i - \mu_j$. Nous exposons dans la suite les procédures de test simultané de plusieurs contrastes en gardant à l'esprit que nous appliquerons principalement les résultats au cas où ces contrastes sont des différences de moyennes.

Nous rappelons que nous n'utiliserons l'un des tests de comparaisons multiples que si le facteur étudié est à effets fixes et que nous avons rejeté l'hypothèse nulle d'absence d'effet de ce facteur sur la réponse.
Nous exposons ici la théorie des comparaisons multiples pour le cas d'un modèle à un facteur à effets fixes. De manière plus générale, il est **possible** de comparer les effets des différents niveaux d'un facteur si ceux-ci **sont à effets fixes**. Il n'est généralement **intéressant** de comparer les effets des différents niveaux d'un facteur que si aucun des termes d'interaction mettant en jeu ce facteur n'a un effet significatif au seuil α.

9.2.1. La méthode de Tukey

Cette méthode n'est valable que si le nombre de répétitions J_i d'une modalité à l'autre du facteur A est constant. Ce nombre commun de répétitions est alors noté J. Pour une version de la méthode de Tukey adaptée au cas où le plan n'est pas équilibré voir le paragraphe 9.2.2 sur la méthode de Tukey-Kramer.

Si L est un contraste dont un estimateur est $\widehat{L}$, alors un intervalle de confiance de niveau simultané $100(1-\alpha)$ % pour tous les contrastes considérés est donné par la formule suivante :

$$\widehat{L}(\boldsymbol{y}) - T\sqrt{\frac{s_R^2}{J}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right) < L < \widehat{L}(\boldsymbol{y}) + T\sqrt{\frac{s_R^2}{J}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right),$$

où $T = q(I, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $I(J-1)$ degrés de liberté. Si l'intervalle de confiance obtenu contient la valeur 0, nous décidons que le contraste n'est pas significativement différent de 0 au seuil α. Au contraire si l'intervalle de confiance ne contient pas 0, alors nous décidons que le contraste est significativement différent de 0 au seuil α.

L'intérêt de cette procédure est que, si nous fixons α, les intervalles définis ci-dessus sont valables **simultanément** pour tous les contrastes qu'il est possible de construire !

Nous souhaitons tester l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : L = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : L \neq 0.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $L = 0$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $L \neq 0$ » si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{T\sqrt{\dfrac{s_R^2}{J}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I, I(J-1); 1-\alpha).$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $L = 0$ » si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{T\sqrt{\dfrac{s_R^2}{J}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} < q(I, I(J-1); 1-\alpha).$$

Appliqué au contexte des comparaisons multiples[3], l'intervalle de confiance ci-dessus se transforme de la manière suivante puisque les contrastes étudiés sont du type $L = \mu_i - \mu_j$, $i \neq j$:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i| = \frac{1}{2}(|1| + |-1|) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Ainsi, dans le cas des comparaisons multiples, les intervalles de confiance ci-dessus se simplifient en :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - T\sqrt{\frac{s_R^2}{J}} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + T\sqrt{\frac{s_R^2}{J}}.$$

Les hypothèses et les statistiques des tests se transforment, quant à elles, en :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'}.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{J}}} \geqslant q(I, I(J-1); 1-\alpha).$$

---

[3] Cette procédure est souvent appelée Tukey's HSD, pour *Tukey's Honestly Significance Difference.*

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{J}}} < q(I, I(J-1); 1-\alpha).$$

En utilisant ces intervalles de confiance pour décider **simultanément** de la significativité des $I(I-1)/2$ différences entre les effets des modalités du facteur A, **nous sommes assurés** que la probabilité qu'aucune des différences n'est significative est exactement de $1-\alpha$.

9.2.2. La méthode de Tukey-Kramer

Il s'agit d'une adaptation de la méthode de Tukey au cas où le plan expérimental n'est pas équilibré. Si nous voulons comparer les deux moyennes μ_i et $\mu_{i'}$, nous remplaçons simplement la valeur J correspondant au nombre total constant d'essais réalisés dans des conditions les modalités A_i du facteur A par la moyenne harmonique[4] du nombre de répétitions effectuées dans la modalité A_i et dans la modalité $A_{i'}$.

Les intervalles de confiance ci-dessus se modifient en conséquence :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - T\sqrt{\frac{s_R^2}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i'}\right)} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + T\sqrt{\frac{s_R^2}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i'}\right)},$$

où $T = q(I, n-I; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $n-I$ degrés de liberté.
Les hypothèses sont toujours :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'}.}$$

---

[4] Nous rappelons que la moyenne harmonique $\mathrm{Harm}(a,b)$ de deux nombres réels strictement positifs a et b est définie par :

$$\mathrm{Harm}(a,b) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

.

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{2}\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_i^{'}}\right)}} \geqslant q(I, n-I; 1-\alpha).$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{2}\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_i^{'}}\right)}} < q(I, n-I; 1-\alpha).$$

9.2.3. La méthode de Hochberg

Dans le cadre des comparaisons deux à deux de moyennes, Hochberg a proposé la modification suivante de la méthode de Tukey-Kramer, exposée au paragraphe 9.2.2 :
Les intervalles de confiance ci-dessus sont modifiés en :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - m\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i^{'}}\right)} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + m\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i^{'}}\right)}.$$

où $m = m(I, n-I; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi du maximum du module Studentisé à I et $n-I$ degrés de liberté.
Les hypothèses sont toujours :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'}.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{2}\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_i^{'}}\right)}} \geqslant m(I, n-I; 1-\alpha).$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{2}\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_i^{'}}\right)}} < m(I, n-I; 1-\alpha).$$

9.2.4. La méthode de Scheffé

Contrairement à la méthode de Tukey exposée au paragraphe 9.2.1, la méthode de Scheffé est valide si le plan est déséquilibré. Soit n_i le nombre de répétitions effectuées pour la modalité A_i du facteur A.

Si L est un contraste quelconque estimé par $\widehat{L}$ alors un intervalle de confiance de niveau $100(1-\alpha)$ % est donné par la formule suivante :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L}(\boldsymbol{y}) - S\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}\right)} & < & L \\ & \text{et} & \\ L & < & \widehat{L}(\boldsymbol{y}) + S\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}\right)}, \end{array}$$

où $S^2 = F(I-1, n-I; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $n-I$ degrés de liberté. Si l'intervalle de confiance obtenu contient la valeur 0, nous décidons que le contraste n'est pas significativement différent de 0 au seuil α. Au contraire si l'intervalle de confiance ne contient pas 0, alors nous décidons que le contraste est significativement différent de 0 au seuil α.

L'intérêt de cette procédure est que, si nous fixons α, les intervalles définis ci-dessus sont valables **simultanément** pour tous les contrastes qu'il est possible de construire !

Nous souhaitons tester l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : L = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : L \neq 0.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $L = 0$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $L \neq 0$ » si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}\right)}} \geqslant \sqrt{F(I-1, n-I; 1-\alpha)}.$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $L = 0$ » si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{l_i^2}{n_i}\right)}} < \sqrt{F(I-1, n-I; 1-\alpha)}.$$

Appliqué au contexte des comparaisons multiples, l'intervalle de confiance ci-dessus se transforme de la manière suivante, puisque les contrastes étudiés sont du type $L = \mu_i - \mu_j$,

$i \neq j$:

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{l_i^2}{n_i} = \frac{1}{n_i} + \frac{(-1)^2}{n_{i'}} = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}.$$

Ainsi, dans le cas des comparaisons mulitples, les intervalles de confiance ci-dessus se simplifient en :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - S\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)} &< \mu_i - \mu_{i'} \\ &\text{et} \\ \mu_i - \mu_{i'} &< \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + S\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}. \end{aligned}$$

Les hypothèses et les statistiques des tests se transforment, quant à elles, en :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'}.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}} \geqslant \sqrt{F(I-1, n-I; 1-\alpha)}.$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{(I-1)s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)}} < \sqrt{F(I-1, n-I; 1-\alpha)}.$$

En utilisant ces intervalles de confiance pour décider **simultanément** de la significativité des $I(I-1)/2$ différences entre les effets des modalités A_i du facteur A, **nous sommes assurés** que la probabilité qu'aucune des différences n'est significative est exactment de $1-\alpha$.

Dans le cas où le plan est équilibré nous obtenons l'intervalle de confiance de niveau $100(1-\alpha)$ suivant :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - S\sqrt{\frac{2(I-1)s_R^2}{J}} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + S\sqrt{\frac{2(I-1)s_R^2}{J}}.$$

9.2.5. La méthode de la plus petite différence significative de Fisher

La méthode de la plus petite différence significative de Fisher[5] est une méthode jugée par beaucoup de statisticiens comme inadéquate, voir par exemple [Phi82], puisqu'elle ne tient pas compte du contexte même des comparaisons multiples c'est-à-dire du fait que nous réalisons $I(I-1)/2$ comparaisons qui ne sont pas indépendantes. Nous l'exposons néanmoins brièvement ci-dessous. Cette méthode s'applique que le plan soit équilibré ou non.

Un intervalle de confiance au niveau $100(1-\alpha)$ pour la différence de deux moyennes $\mu_i - \mu_{i'}$ est :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - t\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + t\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)},$$

où $t = t_{n-I;1-\alpha/2}$ est le $100(1-\alpha/2)$ quantile de la loi de Student à $n-I$ degrés de liberté. Si l'intervalle de confiance obtenu contient la valeur 0, alors nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse que le contraste n'est pas significativement différent de 0 au seuil α. Au contraire si l'intervalle de confiance ne contient pas 0, alors nous décidons que le contraste est significativement différent de 0 au seuil α.
Nous souhaitons tester l'hypothèse :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_{i'}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'}.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{s_R^2\left(\dfrac{1}{n_i}+\dfrac{1}{n_{i'}}\right)}} \geqslant t_{n-I;1-\alpha/2}.$$

Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_{i'}$ » si :

$$\frac{|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y})|}{\sqrt{s_R^2\left(\dfrac{1}{n_i}+\dfrac{1}{n_{i'}}\right)}} < t_{n-I;1-\alpha/2}.$$

---

[5] En anglais ce test de comparaisons muliples est souvent noté *Fisher's LSD* pour *Fisher's Least Significant Difference.*

9.2.6. La méthode de Bonferroni

Supposons que nous souhaitons réaliser k comparaisons de moyennes ou k tests de contrastes et prendre une décision conjointe au risque de première espèce α. Nous notons E_i l'évènement associé au rejet de l'absence de différence significative au seuil α_{ind} lors de la $i-$ème comparaison ou le test du $i-$ème contraste. La méthode de Bonferroni est basée sur l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}\left[E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k\right] \\ &\leqslant \mathbb{P}\left[E_1\right] + \mathbb{P}\left[E_2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[E_k\right] \\ &\leqslant k * \alpha_{\text{ind}}.\end{aligned}$$

Ainsi si nous voulons être sûr que le risque de première espèce α associé globalement à la prise simultanée de toutes les décisions lors des k comparaisons ou des k tests de contrastes est plus petit qu'une valeur α_0 fixée à l'avance, il suffit de choisir :

$$\alpha_{\text{ind}} \leqslant \frac{\alpha_0}{k}.$$

Nous procédons alors à des comparaisons des moyennes deux à deux avec un test t de Student de seuil α_0/k ou à un test de chacun des contrastes avec la statistique exposée au paragraphe 9.1.4 au seuil α_0/k. Cette procédure s'applique donc si le plan est équilibré ou non.

Les intervalles de confiance pour k comparaisons de deux moyennes μ_i et $\mu_{i'}$ de deux groupes d'effectifs n_i et $n_{i'}$ sont :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - t_B\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i^{'}}\right)} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + t_B\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i^{'}}\right)},$$

où $t_B = t(n-I; 1-\dfrac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $n-I$ degrés de liberté.

Remarque :

Il est conseillé, par Fleiss voir [Fle86], d'utiliser la procédure de Bonferroni dans les cas suivants :

1. Le nombre de comparaisons k n'est pas très élevé, cette procédure étant trop conservative[6] si k est élevé.

2. Nous préférerons la procédure de Bonferroni à celle de Scheffé si le nombre de comparaisons est strictement inférieur à I^2.

3. Nous préférerons la procédure de Bonferroni à celle de Tukey si le nombre de comparaisons est strictement inférieur à $I(I-1)/2$ ou si nous souhaitons tester en plus un petit nombre de comparaisons autres que celles des effets principaux des modalités A_i du facteur A.

---

[6] Une procédure est dite **conservative** si son niveau de confiance est supérieur à celui fixé, ici $1-\alpha_0$. La détection de différences significatives étant alors « trop difficile » par rapport au seuil que nous avions fixé en avance pour le test.

4. Nous préférerons la procédure de Bonferroni à celle de Dunnett si nous souhaitons tester en plus d'autres comparaisons que celles des effets principaux des modalités A_i du facteur A au niveau de contrôle A_{i_0} ou si nous souhaitons tester d'autres comparaisons que celles des effets principaux des modalités A_i du facteur A au niveau de contrôle A_{i_0}.

5. Les mêmes recommendations s'appliquent si nous considérons des tests portant sur des contrastes.

9.2.7. La méthode de rejet séquentiel de Bonferroni de Holm

La méthode de rejet séquentiel de Bonferroni de Holm[7] est dérivée de la méthode de Bonferroni exposée au paragraphe 9.2.6. Elle a été introduite pour augmenter la puissance de la méthode de Bonferroni. Elle consiste simplement à modifier le seuil des tests de comparaison de la manière suivante : si l'un des tests de comparaison est significatif au niveau $\alpha_{\text{ind}} = \alpha/k$, alors nous effectuons le test suivant au niveau $\alpha_{\text{ind}} = \alpha/(k-1)$ et ainsi de suite...

Les conseils d'utilisation sont les mêmes que ceux exposés au paragraphe 9.2.6 et nous pouvons aussi bien nous en servir pour des plans équilibrés que des plans déséquilibrés.

9.2.8. La méthode de Dunn-Šidák

La méthode de Dunn-Šidák est basée sur la même idée que celle de Bonferroni, seule l'inégalité utilisée pour déterminer le seuil individuel de chacune des comparaisons, α_{ind}, est modifiée.

Supposons que nous souhaitons réaliser k comparaisons de moyennes ou k tests de contrastes et prendre une décision conjointe au risque de première espèce α. Nous notons E_i l'évènement associé au rejet de l'absence de différence significative au seuil α_{ind} lors de la $i-$ème comparaison ou le test du $i-$ème contraste. La méthode de Dunn-Šidák est basée sur l'inégalité suivante :

$$\alpha \quad \leq \quad 1-(1-\alpha_{\text{ind}})^k.$$

L'inégalité de Bonferroni est plus grossière que celle de Dunn-Šidák et de ce fait la procédure de Bonferroni est plus conservative que celle de Dunn-Šidák. Ainsi si nous voulons être sûr que le risque de première espèce α associé globalement à la prise simultanée de toutes les décisions lors des k comparaisons ou des k tests de contrastes est plus petit qu'une valeur α_0 fixée à l'avance, il suffit de choisir :

$$\alpha_{\text{ind}} \leqslant 1-\sqrt[k]{1-\alpha_0}.$$

Nous procédons alors à des comparaisons des moyennes deux à deux avec un test t de Student de seuil $1-\sqrt[k]{1-\alpha_0}$ ou à un test de chacun des contrastes avec la statistique exposée au paragraphe 9.1.4 au seuil $1-\sqrt[k]{1-\alpha_0}$. Cette procédure s'applique donc si le plan est équilibré ou non.

---

[7] En anglais *Holm's SRB criterion* pour *Holm's Sequentially Rejective Bonferroni criterion.*

L'intervalle de confiance de niveau $100(1-\alpha_0)$ % pour $\mu_i - \mu_{i'}$ est alors le suivant :

$$\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) - t_{DS}\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_i^{'}}\right)} < \mu_i - \mu_{i'} < \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{i'}}(\boldsymbol{y}) + t_{DS}\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_i^{'}}\right)},$$

où $t_{DS} = t(n-I;\sqrt[k]{1-\alpha_0})$ est le $100\sqrt[k]{1-\alpha_0}$ quantile de la loi de Student à $n-I$ degrés de liberté.

9.2.9. La méthode de Newman-Keuls

Cette procédure est également connue sous le nom de test de Student-Newman-Keuls et est utilisable si le plan est équilibré ou déséquilibré.

1. Nous commençons par ordonner les estimations des moyennes $\widehat{\mu_1}(\boldsymbol{y}), \ldots, \widehat{\mu_I}(\boldsymbol{y})$ par ordre croissant. Nous obtenons donc $\widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y}) \leqslant \ldots \leqslant \widehat{\mu_{(I)}}(\boldsymbol{y})$. Nous ordonnons de la même manière les moyennes $\mu_1, \ldots, \mu_I$.
2. Nous calculons la quantité $\widehat{\mu_{(I)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y})$, qui est toujours positive, et nous la comparons à $W_{(I)}$ où :

   $$W_{(I)} = q(I, I(J-1); 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{J}},$$

   avec $q(I, I(J-1); 1-\alpha)$ le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $I(J-1)$ degrés de liberté.
   Si $\widehat{\mu_{(I)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y}) \geqslant W_{(I)}$ alors nous décidons que le groupe de moyennes $\mu_{(1)}, \ldots \mu_{(I)}$ n'est pas homogène et nous créons les deux groupes $\mu_{(1)}, \ldots, \mu_{(I-1)}$ et $\mu_{(2)}, \ldots, \mu_{(I)}$ sinon nous considérons que le groupe de moyennes $\mu_{(1)}, \ldots \mu_{(I)}$ est homogène et la procèdure s'arrête là.
3. Nous calculons les quantités $\widehat{\mu_{(I-1)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y})$ et $\widehat{\mu_{(I)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(2)}}(\boldsymbol{y})$, qui sont toujours positives, et nous les comparons à $W_{(I-1)}$ où :

   $$W_{(I-1)} = q(I-1, I(J-1); 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{J}},$$

   avec $q(I-1, I(n-1); 1-\alpha)$ le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté.
   Si $\widehat{\mu_{(I-1)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y}) \geqslant W_{(I)}$ alors nous décidons que le groupe de moyennes $\mu_{(1)}, \ldots \mu_{(I-1)}$ n'est pas homogène et nous créons les deux groupes $\mu_{(1)}, \ldots, \mu_{(I-2)}$ et $\mu_{(2)}, \ldots, \mu_{(I-1)}$ sinon nous considérons que le groupe de moyennes $\mu_{(1)}, \ldots \mu_{(I-1)}$ est homogène et la procèdure s'arrête là pour ce groupe. Nous pratiquons la même analyse pour le groupe $\mu_{(2)}, \ldots, \mu_{(I)}$.
4. Nous réitérons le processus, en utilisant la valeur critique $W_{(k)}$ avec :

   $$W_{(k)} = q(k, I(J-1); 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{J}}$$

> avec k le nombre de moyennes que comporte le groupe dont nous testons l'homogénéité, jusqu'à ce que tous les groupes obtenus soient homogènes ou que toutes les moyennes aient été comparées entre elles. Dans la pire des configurations nous obtiendrons I groupes disctincts ce qui prouve que cette procèdure se termine bien.

L'avantage de cette procédure est d'aboutir à la constitution, au risque global de $\alpha = 5\ \%$, de groupes de moyennes homogènes.
Pour tenir compte d'un éventuel déséquilibre du plan expérimental nous remplaçons, dans les expressions ci-dessus, J par la moyenne harmonique du nombre de répétitions dans les modalités pour lesquelles les moyennes sont la plus petite et la plus grande de l'ensemble considéré. Ainsi, par exemple, nous comparerons la quantité $\widehat{\mu_{(I)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(1)}}(\boldsymbol{y})$, qui est toujours positive, à $W_{(I)}$ défini par :

$$W_{(I)} = q(I, n-I; 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{2}\left(\frac{1}{n_{(1)}} + \frac{1}{n_{(I)}}\right)},$$

avec $q(I, n-I; 1-\alpha)$ le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $n-I$ degrés de liberté.

9.2.10. La méthode de Duncan

Le test de l'étendue multiple de Duncan[8] est basée sur le même algorithme, c'est-à-dire la même suite de décisions, que celle du test de Newman-Keuls exposée au paragraphe 9.2.9. La seule différence entre ces deux procédures réside dans le fait que les estimations des étendues des groupes de moyennes comportant k moyennes sont comparées à la valeur $D_{(k)}$ où $D_{(k)}$ est définie par :

$$D_{(k)} = R(k, I(J-1); 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{J}},$$

avec $R(k, I(J-1); 1-\alpha)$ le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue multiple de Duncan à k et $I(J-1)$ degrés de liberté, I le nombre de niveaux du facteur A et J le nombre de répétitions commun à toutes les modalités A_i du facteur A.

Pour tenir compte d'un éventuel déséquilibre du plan expérimental nous remplaçons, dans les expressions ci-dessus, J par la moyenne harmonique du nombre de répétitions dans les modalités pour lesquelles les moyennes sont la plus petite et la plus grande de l'ensemble considéré. Ainsi, par exemple si nous cherchons à tester l'homogénéité de k moyennes dont l'estimation la plus petite est pour $\mu_{(i)}$ et l'estimation la plus grande pour $\mu_{(i')}$, nous comparerons la quantité $\widehat{\mu_{(i)}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{(i')}}(\boldsymbol{y})$ à $D_{(k)}$ définie par :

$$D_{(k)} = q(k, n-I; 1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{2}\left(\frac{1}{n_{(i)}} + \frac{1}{n_{(i')}}\right)},$$

avec $q(k, n-I; 1-\alpha)$ le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue multiple de Duncan à k et $n-I$ degrés de liberté.

---

[8] En anglais Duncan's Multiple Range Test.

9.2.11. La méthode de Dunnett

Le test de Dunnett a été proposé pour le contexte particulier de la comparaison des effets des modalités A_i d'un facteur A avec un niveau de référence de ce facteur, souvent appelé niveau de contrôle et noté A_c. Cette procédure peut être utilisée si le plan est équilibré ou non.

Il s'agit simplement d'une modification de la valeur critique utilisée avec la statistique du test t de Student pour deux moyennes. Ainsi la valeur de la différence des estimations de la moyenne de la réponse μ_i obtenue pour la modalité A_i du facteur A et de la moyenne μ_c de la réponse obtenue pour le niveau de contrôle A_c du facteur A.
Nous souhaitons tester l'hypothèse :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mu_i = \mu_c}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mu_i \neq \mu_c.}$$

Nous rappelons que ce jeu d'hypothèses est équivalent à celui-ci :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_i = \alpha_c}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \alpha_i \neq \alpha_c.}$$

Le test est significatif au seuil α et nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_c$ » en faveur de l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ « $\mu_i \neq \mu_c$ » si :

$$|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_c}(\boldsymbol{y})| \geqslant D(I-1, n-I; 1-\alpha)\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_c}\right)},$$

où $D(I-1, n-I; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Dunnett à $I-1$ et $n-I$ degrés de liberté. Le test n'est pas significatif au seuil α et nous décidons de conserver par défaut l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ « $\mu_i = \mu_c$ » si :

$$|\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_c}(\boldsymbol{y})| < D(I-1, n-I; 1-\alpha)\sqrt{s_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_c}\right)},$$

où $D(I-1, n-I; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Dunnett à $I-1$ et $n-I$ degrés de liberté.
Le test doit être préféré aux autres procédures lorsque nous souhaitons seulement comparer les effets des modalités A_i avec l'effet de la modalité de contrôle A_c d'un facteur A. En effet ce test est dans ce cas généralement plus puissant.

9.3. Comparaisons multiples sous l'hypothèse d'hétéroscédasticité

9.3.1. La méthode de Games et Howell

Il s'agit d'une modification des statistiques du test de Tukey-Kramer pour tenir compte de l'hétérogénéité des variances σ_i^2 des niveaux A_i du facteur A ainsi que d'un éventuel déséquilibre du plan. Nous remplaçons ainsi S_R^2 par :

$$S_R^2 = \sqrt{\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_{i'}^2}{n_{i'}}},$$

où

$$\begin{aligned} S_i^2 &= \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{i,j} - Y_{i,\bullet}\right)^2, \\ S_{i'}^2 &= \frac{1}{n_i^{'} - 1} \sum_{j=1}^{n_i^{'}} \left(Y_{i',j} - Y_{i',\bullet}\right)^2, \end{aligned}$$

sont les estimateurs sans biais des variances au sein des niveaux A_i et $A_{i'}$ du facteur. Nous désignons par s_i^2 et $s_{i'}^2$ les estimations de σ_i^2 et $\sigma_{i'}^2$ associées aux estimateurs S_i^2 et $S_{i'}^2$. Cette modification permet donc de tenir compte des éventuelles différences entre les variances σ_i^2 et $\sigma_{i'}^2$ ou entre le nombre de répétitions n_i et $n_{i'}$ d'un niveau du facteur A à l'autre.

Nous modifions également un des degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisée dont nous nous servons pour trouver les quantiles nécessaires au test. Plus précisement, nous utilisons $q(I, \nu_{i,i'}; 1-\alpha)$ avec :

$$\nu_{i,i'} = \frac{\left(\dfrac{s_i^2}{n_i} + \dfrac{s_{i'}^2}{n_{i'}}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_i^2}{n_i}\right)^2}{n_i - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_{i'}^2}{n_{i'}}\right)^2}{n_{i'} - 1}}.$$

9.4. Deux méthodes recommandées

Les procédures de Newman-Keuls et de Duncan sont toutes deux basées sur des méthodes de tests multiples de l'étendue séquentiels. Il a été montré que ces procédures sont statistiquement invalides. Les deux méthodes suivantes sont valides et recommandées par l'encyclopédie de statistique, pour plus de détails voir [KRB96].

9.4.1. Le test multiple des étendues de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch

Nous souhaitons utiliser des tests multiples de l'étendue, nous utilisons les valeurs suivantes pour les seuils :

$$\alpha_m = \begin{cases} 1-(1-\alpha)^{\frac{m}{I}} & \text{si} \quad m = 2, \ldots, I-2, \\ \alpha & \text{si} \quad m = I-1, I. \end{cases} \tag{9.4.1}$$

La validité du test multiple des étendues de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch est basée sur la validité du procédé plus général de comparaisons descendant décrit ci-dessous.

Pour tout sous-ensemble $\mathbb{K}$ inclus dans $\mathbb{I} = \{1, \ldots, I\}$, soit $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ l'hypothèse :

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{K}} : \mu_i = \mu_j \text{ pour tout } i, j \text{ de } \mathbb{K},}$$

et soit $|\mathbb{K}|$ le nombre d'éléments de $\mathbb{K}$. Nous ne considérerons dans ce paragraphe que des sous-ensembles de $\mathbb{I}$ formés d'entiers consécutifs.

1. Tester au seuil $\alpha = \alpha_{|\mathbb{I}|} = \alpha_I$, donné par l'équation (9.4.1), $\mathcal{H}_{\mathbb{I}} : \mu_1 = \ldots = \mu_I$. Si $\mathcal{H}_{\mathbb{I}}$ n'est pas rejetée au seuil $\alpha = \alpha_I$, alors nous décidons que nous ne pouvons rejeter aucune des hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{I}$ et nous arrêtons le procédé à cette étape. Sinon nous décidons qu'il existe i_0 et j_0 dans $\{1, \ldots, I\}$ tels que $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$ et nous nous rendons à l'étape **2.**.

2. Tester au seuil $\alpha = \alpha_{|\mathbb{I}|-1} = \alpha_{I-1}$, donné par l'équation (9.4.1), chaque $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ avec $|\mathbb{L}| = I-1$ et en imposant la condition que les entiers qui appartiennent à $\mathbb{L}$ sont consécutifs qui n'a pas encore été acceptée. Si l'hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ est acceptée, alors nous décidons que nous ne pouvons rejeter aucune des hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Sinon nous décidons qu'il existe i_0 et j_0 dans $\mathbb{L}$ tels que $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$. Si aucune des $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ n'est rejetée, nous avonsrrête la procédure ; dans le cas contraire, nous nous rendons à l'étape **3.**.

3. Tester au seuil $\alpha = \alpha_{|\mathbb{L}|}$, donné par l'équation (9.4.1), chaque $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ et en imposant la condition que les entiers qui appartiennent à $\mathbb{L}$ sont consécutifs qui n'a pas encore été acceptée lors d'une étape précédente. Si $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ est acceptée, alors nous décidons que nous ne pouvons rejeter aucune des hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Sinon nous décidons qu'il existe i_0 et j_0 dans $\mathbb{L}$ tels que $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$.

4. Continuer jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$, pour laquelle les entiers qui appartiennent à $\mathbb{L}$ sont consécutifs, à tester au seuil $\alpha_{|\mathbb{J}|}$.

5. Enfin décider que $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$ si tout $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ telle que $i_0, j_0 \in \mathbb{L}$ est rejetée.

Pour réaliser le test multiple des étendues de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch nous testons les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ de la manière suivante :

- Nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ si

$$\max_{i,j \in \mathbb{L}} \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_j}(\boldsymbol{y}) < c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}} \sqrt{\frac{2 s_R^2}{n}},$$

où $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ est défini par :

$$\alpha_{|\mathbb{L}|} = \mathbb{P}\left[\max_{i,j\in\mathbb{L}} \frac{\widehat{\mu_i}-\widehat{\mu_j}}{\sqrt{\dfrac{2S_R^2}{n}}} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right].$$

Ainsi avec le choix de l'équation (9.4.1) pour les valeurs des α_m, $1 \leqslant m \leqslant I$ nous obtenons, si $2 \leqslant |\mathbb{L}| \leqslant I-2$:

$$1-(1-\alpha)^{\frac{|\mathbb{L}|}{I}} = \mathbb{P}\left[\max_{i,j\in\mathbb{L}} \frac{\widehat{\mu_i}-\widehat{\mu_j}}{\sqrt{\dfrac{2S_R^2}{n}}} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right],$$

et si $I-1 \leqslant |\mathbb{L}| \leqslant I$:

$$\alpha = \mathbb{P}\left[\max_{i,j\in\mathbb{L}} \frac{\widehat{\mu_i}-\widehat{\mu_j}}{\sqrt{\dfrac{2s_R^2}{n}}} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right].$$

Ainsi $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ est donc le $100(1-\alpha_{|\mathbb{L}|})$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à $|\mathbb{L}|$ et $n-I$ degrés de liberté.

- Nous décidons de rejeter l'hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ si

$$\max_{i,j\in\mathbb{L}} \widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y})-\widehat{\mu_j}(\boldsymbol{y}) \geqslant c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\sqrt{\frac{2s_R^2}{n}},$$

où $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ est défini comme ci-dessus.

Si les valeurs critiques c_m, $1 \leqslant m \leqslant I$ utilisées sont croissantes avec m alors le test multiple des étendues de Ryan-Einot-Gabriel-Welsch est un cas particulier de la procédure descendante ci-dessous et de ce fait valide. Malheureusement, avec la définition de α_m donnée par l'équation (9.4.1), il n'y a aucune garantie que la valeur critique c_m soit croissante avec m. Pour comprendre pourquoi cette condition est absolument nécessaire, nous pourrons consulter l'exemple page 5067 dans [KRB96]

Ainsi, nous préférerons utiliser, si les valeurs critiques calculées à l'aide de l'équation (9.4.1) ne sont pas monotones, c'est-à-dire si elles ne sont pas croissantes, les valeurs critiques modifiées définies par :

$$c_m^{'} = \max_{2\leqslant j\leqslant m} c_j, \quad m = 2,\ldots,I.$$

Attention à bien vérifier ce point si nous ne voulons pas obtenir de résultats incohérents.

Remarque :

Nous aurions pu utiliser la procédure ci-dessous avec une autre manière de tester les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$, par exemple des tests t à deux échantillons, nous utilisonsra alors l'inégalité de Bonferroni et les valeurs suivantes pour les seuils :

$$\alpha_m = \begin{cases} \dfrac{m}{I}\alpha & \text{si} \quad m = 2, \ldots, I-2, \\ \alpha & \text{si} \quad m = I-1, I. \end{cases}$$

Toutefois cette procédure possède le même défaut que celle de Bonferroni par rapport à celle de la méthode de Dunn-Šidák : elle est plus conservative, voir le paragraphe 9.2.8.

9.4.2. Tests $F-$multiples

La validité de la méthode des tests $F-$multiples est basée sur la validité du procédé plus général de comparaisons descendant décrit ci-dessous.

Pour tout $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{I} = \{1, \ldots, I\}$, soit $H_{\mathbb{L}}$ l'hypothèse :

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathbb{L}} : \mu_i = \mu_j \text{ pour tout } i, j \text{ de } \mathbb{L},}$$

et soit $|\mathbb{L}|$ le nombre d'éléments de $\mathbb{L}$.

1. Contrairement aux tests basés sur l'étendue nous ne pouvons nous contenter de tester des hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ pour lesquelles les indices appartenant à $\mathbb{L}$ sont consécutifs. Attention à bien faire tous les tests au seuil $\alpha_{\mathbb{L}}$ pour toutes les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ possibles, avec $\mathbb{L} \subset \mathbb{I}$ si nous ne voulons pas obtenir de résultats incohérents au seuil α.

2. Continuer jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ à tester.
3. Décider alors que $\mu_{i_0} \neq \mu_{j_0}$ au seuil α si toutes les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ pour lesquelles $i_0, j_0 \in \mathbb{L}$ sont rejetées au seuil $\alpha_{\mathbb{L}}$.

Pour réaliser les tests $F-$multiples nous testons les hypothèses $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ de la manière suivante :

- Nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ si

$$\frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} n \left(\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\mu_{\mathbb{L}}}(\boldsymbol{y})\right)^2}{\left(|\mathbb{L}|-1\right) s_R^2} < c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}},$$

où $\widehat{\mu_{\mathbb{L}}}$ est défini par

$$\widehat{\mu_{\mathbb{L}}} = \frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} \sum_{a=1}^{n} Y_{i,a}}{\sum_{i\in\mathbb{L}} n},$$

ainsi que $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ par

$$\alpha_{|\mathbb{L}|} = \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} n \left(\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_{\mathbb{L}}}\right)^2}{\left(|\mathbb{L}|-1\right) S_R^2} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right].$$

Ainsi avec le choix de l'équation (9.4.1) pour les valeurs des α_i, $1 \leqslant i \leqslant I$ nous obtenons, si $2 \leqslant |\mathbb{L}| \leqslant I-2$:

$$1-(1-\alpha)^{\frac{|\mathbb{L}|}{I}} = \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} n\left(\widehat{\mu_i}-\widehat{\mu_{\mathbb{L}}}\right)^2}{(|\mathbb{L}|-1)\,S_R^2} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right],$$

et si $I-1 \leqslant |\mathbb{L}| \leqslant I$:

$$\alpha = \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} n\left(\widehat{\mu_i}-\widehat{\mu_{\mathbb{L}}}\right)^2}{(|\mathbb{L}|-1)\,S_R^2} > c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}\right].$$

Ainsi $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ est donc le $100(1-\alpha_{|\mathbb{L}|})$ quantile de la loi de Fisher à $|\mathbb{L}|-1$ et $n-I$ degrés de liberté.

- Nous décidons de rejeter l'hypothèse $\mathcal{H}_{\mathbb{L}}$ au seuil $\alpha_{|\mathbb{L}|}$ si

$$\frac{\sum_{i\in\mathbb{L}} n\left(\widehat{\mu_i}(\boldsymbol{y})-\widehat{\mu_{\mathbb{L}}}(\boldsymbol{y})\right)^2}{(|\mathbb{L}|-1)\,s_R^2} \geqslant c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}},$$

où $c_{\alpha_{|\mathbb{L}|}}$ est défini comme ci-dessus.

9.5. Comparaisons avec le « meilleur »

Dans certains cas il peut être intéressant de comparer les effets de tous les niveaux d'un facteur avec l'effet extrême, maximal ou minimal, que nous avons observé et que nous considérons comme le « meilleur ». Ce type de problématique ne peut être traité à l'aide d'une approche basée sur la méthode de Dunnett puisque nous ne savons pas ***a priori*** pour quelle modalité nous allons observer le « meilleur » effet.

Nous utilisons alors des techniques de comparaisons multiples avec le « meilleur[9] », le plus souvent celle de Hsu ou celle de Edwards-Hsu.

Nous nous intéressons ici donc non pas à toutes les comparaisons possibles mais seulement à celles-ci :

- Si le « meilleur » est la valeur la plus élevée nous utilisons :

$$\mu_i - \max_{j\neq i} \mu_j, \quad i=1,\ldots,I,$$

ainsi si $\mu_{i_0} - \max_{j\neq i_0} \mu_j > 0$ alors la modalité i_0 est celle pour laquelle l'effet est maximal et de ce fait la « meilleure ». Par contre si $\mu_{i_1} - \max_{j\neq i_1} \mu_j < 0$ alors la modalité i_1 n'est pas celle pour laquelle l'effet est maximal.
Si l'effet de la modalité i_2 n'est pas le plus important mais que nous avons néanmoins $\mu_{i_2} - \max_{j\neq i_2} \mu_j > -\delta$ avec δ un petit nombre réel strictement positif alors la modalité i_2 est proche de la « meilleure ».

---

[9] Ceci est souvent abrégé en anglais en *MCB* pour « Multiple comparisons with the Best ».

- Si le « meilleur » est la valeur la moins élévée nous utilisons :

  $$\mu_i - \min_{j \neq i} \mu_j, \quad i = 1, \ldots, I,$$

  ainsi si $\mu_{i_0} - \min_{j \neq i_0} \mu_j < 0$ alors la modalité i_0 est celle pour laquelle l'effet est minimal et de ce fait la « meilleure ». Par contre si $\mu_{i_1} - \min_{j \neq i_1} \mu_j > 0$ alors la modalité i_1 n'est pas celle pour laquelle l'effet est minimal.
  Si l'effet de la modalité i_2 n'est pas le plus important mais que nous avons néanmoins $\mu_{i_2} - \min_{j \neq i_2} \mu_j > \delta$ avec δ un petit nombre réel strictement positif alors la modalité i_2 est proche de la « meilleure ».

9.5.1. La méthode de Hsu

Hsu a développé des intervalles de confiance simultanés de niveau de confiance $100(1-\alpha)$ pour $\mu_i - \max_{j \neq i} \mu_j, \ i = 1, \ldots, I$. Ces intervalles contiennent tous la valeur 0 et sont construits ainsi : pour chaque i, soit d_i la valeur critique telle que

$$\mathbb{P}\left[\widehat{\mu_i} - \mu_i > \widehat{\mu_j} - \mu_j - d_i\sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}, \ \forall\, j | j \neq i\right] = 1 - \alpha.$$

Nous remarquons que d_i est la valeur critique pour les comparaisons multiples unilatérales en considérant le $i-$ème niveau comme le niveau de contrôle.

Les intervalles fermés $\left[D_i^-, D_i^+\right]$, $i = 1, \ldots, I$ où

$$\begin{array}{rcl} D_i^+ & = & \max\left\{0, \min_{j \neq i}\left(\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} - d_i\sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}\right)\right\} \\ G & = & \left\{i \mid D_i^+ > 0\right\} \\ D_i^- & = & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } i \notin G \\ \min_{j \in G, j \neq i}\left(\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} - d_j\sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}\right) & \text{si } i \in G \end{array}\right. \end{array}$$

forment un ensemble d'intervalles de confiance simultanés de niveau de confiance $100(1-\alpha)$ pour $\mu_i - \max_{j \neq i} \mu_j, \ i = 1, \ldots, I$.

Lorsque le plan est équilibré les intervalles se transforment en :

$$\left[-\min\left\{0, \left(\widehat{\mu_i} - \max_{j \neq i} \widehat{\mu_j} - d\sqrt{\frac{2S_R^2}{n}}\right)\right\}, \max\left\{0, \left(\widehat{\mu_i} - \max_{j \neq i} \widehat{\mu_j} - d\sqrt{\frac{2S_R^2}{n}}\right)\right\}\right],$$

où $1 \leqslant i \leqslant I$ et $d = d_1 = \ldots = d_I$.

9.5.2. La méthode de Edwards-Hsu

Si nous cherchons à avoir également des bornes sur l'écart minimum entre la valeur du « meilleur » traitement et celle des autres traitements que celui dont l'estimatinous avons été la meilleure, alors nous pouvons utiliser la méthode de Edwards-Hsu. Celle-ci permet d'obtenir des intervalles de confiance simultanés pour $\mu_i - \max_{i \leqslant j \leqslant I} \mu_j$, $i = 1, \ldots, I$ que nous ne forçons plus à contenir la valeur 0.

Pour chaque i, soit $|d|_i$ la valeur critique telle que

$$\mathbb{P}\left[\widehat{\mu_i} - \mu_i - (\widehat{\mu_j} - \mu_j) < |d|_i \sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)},\ \forall\ j|j \neq i\right] = 1 - \alpha.$$

Nous remarquons que d_i est la valeur critique pour les comparaisons multiples avec un contrôle en considérant le $i-$ème niveau comme le niveau de contrôle et de ce fait le nombre $|d|_i$ est supérieur à d_i qui est utilisé dans la méthode de Hsu.

Les intervalles $[L_i, U_i]$ définis par

$$S = \left\{ i \text{ tels que } \min_{j \neq i} \left\{ \widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} + |d|_i \sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \right\} > 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} - |d|_j \sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} & \text{si } i \neq j \end{cases}, \\ U_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -\min\left\{0, \left(\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} + |d|_j \sqrt{S_R^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}\right)\right\} & \text{si } i \neq j \end{cases}, \end{aligned}$$

$$L_i = \min_{j \in S} L_{ij} \qquad U_i = \max_{j \in S} U_{ij}$$

pour $i = 1, \ldots, I$, forment un ensemble d'intervalles de confiances simultanés de niveau $100(1 - \alpha)$ pour $\mu_i - \max_{i \leqslant j \leqslant I} \mu_j$, $i = 1, \ldots, I$.

Lorsque le plan est équilibré les quantités utilisées pour construire les intervalles se transforment de la manière suivante.

Il n'y a qu'une seule valeur critique $|d| = |d|_1 = |d|_I$ définie par :

$$\mathbb{P}\left[\widehat{\mu_i} - \mu_i - (\widehat{\mu_j} - \mu_j) < |d| \sqrt{\frac{2S_R^2}{n}},\ \forall\ j|j \neq i\right] = 1 - \alpha.$$

Nous remarquons que d est la valeur critique pour les comparaisons multiples avec un contrôle en considérant l'un quelconque des niveaux comme le niveau de contrôle et de ce fait le nombre $|d|$ est supérieur à d qui est utilisé dans la méthode de Hsu.

Les intervalles $[L_i, U_i]$ définis par

$$S = \left\{ i \text{ tels que } \min_{j \neq i} \left\{ \widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} + |d| \sqrt{\frac{2S_R^2}{n}} \right\} > 0 \right\},$$

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} - |d| \sqrt{\dfrac{2S_R^2}{n}} & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ -\min\left\{ 0, \left(\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_j} + |d| \sqrt{\dfrac{2S_R^2}{n}} \right) \right\} & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$L_i = \min_{j \in S} L_{ij} \qquad U_i = \max_{j \in S} U_{ij}$$

pour $i = 1, \ldots, I$, forment un ensemble d'intervalles de confiances simultanés de niveau $100(1-\alpha)$ pour $\mu_i - \max_{i \leqslant j \leqslant I} \mu_j$, $i = 1, \ldots, I$.

9.6. Deux facteurs sans répétition

Nous pouvons adapter les méthodes de comparaison des effets des différentes modalités, exposées aux paragraphes 9.1, 9.2 et 9.3 dans le cas de l'analyse de la variance à un facteur à effets fixes, au cas où nous considérons un modèle à deux facteurs sans interaction à effets fixes ou à effets mixtes. Nous commençons par détailler les modifications à faire pour utiliser les méthodes de Tukey et de Scheffé.

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.1.1 ou du paragraphe 3.3.1 en fonction de la situation étudiée.

9.6.1. Contrastes

Les contrastes mettent en jeu des moyennes associées soit au premier facteur A, s'il est à effets fixes, soit au second facteur B, s'il est à effets fixes. Il y a ainsi deux types de contrastes :

$$\begin{aligned} L &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_I\alpha_I, \\ L' &= l'_1\beta_1 + l'_2\beta_2 + \cdots + l'_J\beta_J. \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^{I} l_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{J} l'_j = 0$.
Des estimateurs sans biais de L et L' sont alors :

$$\begin{aligned} \widehat{L} &= l_1\widehat{\alpha_1} + l_2\widehat{\alpha_2} + \cdots + l_I\widehat{\alpha_I}, \\ \widehat{L'} &= l'_1\widehat{\beta_1} + l'_2\widehat{\beta_2} + \cdots + l'_J\widehat{\beta_J}. \end{aligned}$$

Ainsi des estimations sans biais de L et L' s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{L}(\boldsymbol{y}) &= l_1 y_{1,\bullet} + l_2 y_{2,\bullet} + \cdots + l_I y_{I,\bullet}, \\ \widehat{L'}(\boldsymbol{y}) &= l'_1 y_{\bullet,1} + l'_2 y_{\bullet,2} + \cdots + l'_J y_{\bullet,J}. \end{aligned}$$

9.6.2. Méthode de Tukey

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en I et $(I-1)(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_R^2}{J}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I,(I-1)(J-1);1-\alpha).$$

où $q(I,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées au facteur B à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en J et $(I-1)(J-1)$.
Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_R^2}{I}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left|l_j^{'}\right|\right)}} \geqslant q(J,(I-1)(J-1);1-\alpha).$$

où $q(J,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à J et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

9.6.3. Méthode de Scheffé

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $I-1$ et $(I-1)(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{(I-1)s_R^2}{J}\sum_{i=1}^{I}l_i^2}} \geqslant \sqrt{F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)},$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées au facteur B à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $J-1$ et $(I-1)(J-1)$. Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(J-1)s_R^2}{I}\displaystyle\sum_{j=1}^{J} l_j^{'2}}} \geqslant \sqrt{F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)},$$

où $F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

9.6.4. Méthode de Bonferroni et méthodes associées

Nous adaptons ici, de manière similaire, la procédure de Bonferroni et toutes celles qui en découle.

Ainsi si nous ne souhaitons **comparer que deux niveaux** d'un même des deux facteurs, ici par exemple deux niveaux du facteur A, nous pourrons utiliser la valeur critique

$$\sqrt{2}\, t((I-1)(J-1);1-\frac{\alpha}{2})$$

à la place de

$$q(I,(I-1)(J-1);1-\alpha)$$

où $t((I-1)(J-1);1-\alpha/2)$ est le $100(1-\alpha/2)$ quantile de la loi de Student à $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini k de comparaisons** nous pourrons utiliser la valeur critique

$$\sqrt{2}\, t((I-1)(J-1);1-\frac{\alpha}{2k})$$

à la place de

$$q(I,(I-1)(J-1);1-\alpha)$$

où $t((I-1)(J-1);1-\dfrac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

9.7. Deux facteurs avec répétitions

Nous pouvons adapter les méthodes de comparaison des effets des différentes modalités, exposées aux paragraphes 9.1, 9.2 et 9.3 dans le cas de l'analyse de la variance à un facteur à effets fixes, au cas où nous considérons un modèle à deux facteurs avec interaction à effets fixes ou à effets mixtes. Nous commençons par détailler les modifications à faire pour utiliser les méthodes de Tukey et de Scheffé.

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.1.2 ou du paragraphe 3.3.2 en fonction de la situation considérée. La différence fondamentale entre ces deux situations résidant dans le fait que pour la première, **deux facteurs à effets fixes**, nous utiliserons le **carré moyen résiduel** s_R^2 dans les statistiques de test tandis que dans la seconde, **un facteur à effets fixes et un facteur à effets aléatoires**, nous utiliserons le **carré moyen associé au terme de l'interaction** s_{AB}^2 dans les statistiques de test.

9.7.1. Contrastes

Modèle à effets fixes

Dans le cas d'un modèle où les deux facteurs sont à effets fixes, c'est-à-dire le cas envisagé au paragraphe 3.1.2, il peut être intéressant, en fonction de la significativité des différents tests auxquels nous avons procédé, d'étudier les constrastes exposés ci-dessous.

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Si nous rejetons l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ il peut être intéressant de comparer entre elles les réponses moyennes dans chacun des couples de modalités A_i et B_j. Les contrastes L_{AB} qui permettent de comparer les moyennes de la réponse $\mu_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j}$ dans deux différentes configurations expérimentales modalité i du facteur A et modalité j du facteur B contre modalité $i^{'}$ du facteur A et modalité $j^{'}$ du facteur B sont :

$$L_{AB} = \mu_{i,j} - \mu_{i',j'}.$$

Une estimation sans biais de L_{AB} est donnée par :

$$\widehat{L_{AB}}(\boldsymbol{y}) = y_{i,j,\bullet} - y_{i',j',\bullet}.$$

Si nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ il peut être intéressant de comparer entre elles les réponses moyennes dans chacune des modalités A_i ou dans chacune des modalités B_j.

Les contrastes mettent en jeu des moyennes associées soit au premier facteur A soit au second facteur B. Il y a ainsi deux types de contrastes :

$$L = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_I\alpha_I,$$
$$L^{'} = l_1^{'}\beta_1 + l_2^{'}\beta_2 + \cdots + l_J^{'}\beta_J,$$

avec $\sum_{i=1}^{I} l_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{J} l_j^{'} = 0$.

Des estimateurs sans biais de L et $L^{'}$ sont alors :

$$\widehat{L} = l_1\widehat{\alpha_1} + l_2\widehat{\alpha_2} + \cdots + l_I\widehat{\alpha_I},$$
$$\widehat{L^{'}} = l_1^{'}\widehat{\beta_1} + l_2^{'}\widehat{\beta_2} + \cdots + l_J^{'}\widehat{\beta_J}.$$

Ainsi des estimations sans biais de L et $L^{'}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\widehat{L}(\boldsymbol{y}) &= l_1 y_{1,\bullet,\bullet} + l_2 y_{2,\bullet,\bullet} + \cdots + l_I y_{I,\bullet,\bullet},\\ \widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y}) &= l_1^{'} y_{\bullet,1,\bullet} + l_2^{'} y_{\bullet,2,\bullet} + \cdots + l_J^{'} y_{\bullet,J,\bullet}.\end{aligned}$$

Modèle à effets mixtes

Dans le cas d'un modèle mixte, c'est-à-dire le cas envisagé au paragraphe 3.3.2, il peut être intéressant, en fonction de la significativité du test de l'effet du facteur à effets fixes, d'étudier les constrastes du type :

$$L = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_I\alpha_I,$$

avec $\sum_{i=1}^{I} l_i = 0$.
Un estimateur sans biais de L est alors :

$$\widehat{L} = l_1\widehat{\alpha_1} + l_2\widehat{\alpha_2} + \cdots + l_I\widehat{\alpha_I}.$$

Ainsi une estimation sans biais de L s'écrit :

$$\widehat{L}(\boldsymbol{y}) = l_1 y_{1,\bullet,\bullet} + l_2 y_{2,\bullet,\bullet} + \cdots + l_I y_{I,\bullet,\bullet}.$$

9.7.2. Méthode de Tukey

Modèle à effets fixes

L_{AB} est significativement différent de 0 au seuil α si, en supposant que $y_{i,j,\bullet} \geqslant y_{i',j',\bullet}$, nous avons :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{K}}} \geqslant q(IJ, IJ(K-1); 1-\alpha),$$

où $q(IJ, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à IJ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L_{AB} et 0 au seuil α.

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en I et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{JK}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I, IJ(K-1); 1-\alpha).$$

où $q(I, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées au facteur B à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en J et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_R^2}{IK}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left|l_j^{'}\right|\right)}} \geqslant q(J, IJ(K-1); 1-\alpha).$$

où $q(J, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à J et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

Modèle à effets mixtes

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_{AB}^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en I et $(I-1)(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_{AB}^2}{JK}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I, (I-1)(J-1); 1-\alpha).$$

où $q(I, (I-1)(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

9.7.3. Méthode de Scheffé

Modèle à effets fixes

L_{AB} est significativement différent de 0 au seuil α si, en supposant que $y_{i,j,\bullet} \geqslant y_{i^{'},j^{'},\bullet}$, nous avons :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{(IJ-1)\frac{2s_R^2}{K}}} \geqslant \sqrt{F(IJ-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(IJ-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L_{AB} et 0 au seuil α.

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $I-1$ et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(I-1)s_R^2}{JK}\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i^2}} \geqslant \sqrt{F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées au facteur B à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $J-1$ et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(J-1)s_R^2}{IK}\displaystyle\sum_{j=1}^{J} l_j^{'2}}} \geqslant \sqrt{F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

Modèle à effets mixtes

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_{AB}^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $I-1$ et $(I-1)(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(I-1)s_{AB}^2}{JK}\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i^2}} \geqslant F(I-1, (I-1)(J-1); 1-\alpha).$$

où $F(I-1, (I-1)(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à I et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

9.7.4. Méthode de Bonferroni et méthodes associées

Nous adaptons ici, de manière similaire, la procédure de Bonferroni et toutes celles qui en découle.

Modèle à effets fixes

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini k de comparaisons** de contrastes associés au facteur A nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s_R^2}{JK}\left(\sum_{i=1}^{I} l_i^2\right)}$$

à la place de

$$q(I,IJ(K-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{JK}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)$$

où $t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\frac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini $k^{'}$ de comparaisons** de contrastes associés au facteur B nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k'})\sqrt{\frac{s_R^2}{IK}\left(\sum_{j=1}^{J} l_j'^2\right)}$$

à la place de

$$q(J,IJ(K-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{IK}}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}|l_j|\right)$$

où $t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k'})$ est le $100(1-\frac{\alpha}{2k'})$ quantile de la loi de Student à $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Modèle à effets mixtes

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini k de comparaisons** de contrastes associés au facteur A nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t((I-1)(J-1);1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s_{AB}^2}{JK}\left(\sum_{i=1}^{I} l_i^2\right)}$$

à la place de

$$q(I,(I-1)(J-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_{AB}^2}{JK}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)$$

où $t((I-1)(J-1);1-\frac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\frac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

Ainsi dans le cas de comparaisons deux à deux des effets des modalités du facteur A à effets fixes la valeur critique que nous utiliserons avec la procédure de Bonferroni est :

$$\sqrt{2}\, t((I-1)(J-1); 1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s^2_{AB}}{JK}}$$

où $t((I-1)(J-1); 1-\frac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\frac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté.

9.7.5. Cas d'un plan non équilibré et des comparaisons deux à deux

Dans les deux situations, effets fixes ou mixtes, nous pouvons utiliser la procédure de Tukey en remplaçant le nombre de répétitions K par la moyenne harmonique K_h du nombre de répétitions K_i et $K_{i'}$ effectuées dans chacune des deux conditions dont nous souhaitons comparer les effets. Nous rappelons l'expression de K_h :

$$K_h = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_i}+\frac{1}{K_{i'}}\right)}$$

9.8. Deux facteurs emboîtés

Nous pouvons adapter les méthodes de comparaison des effets des différentes modalités, exposées aux paragraphes 9.1, 9.2 et 9.3 dans le cas de l'analyse de la variance à un facteur à effets fixes, au cas où nous considérons un modèle à deux facteurs sans interaction à effets fixes ou à effets mixtes. Nous commençons par détailler les modifications à faire pour utiliser les méthodes de Tukey et de Scheffé.

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 4.1.1 ou du paragraphe 4.3.1 en fonction de la situation considérée. La différence fondamentale entre ces deux situations résidant dans le fait que pour la première, **deux facteurs à effets fixes**, nous utiliserons le **carré moyen résiduel** s^2_R dans les statistiques de test tandis que dans la seconde, **un facteur à effets fixes et un facteur à effets aléatoires**, nous utiliserons le **carré moyen associé au terme emboîté** $s^2_{B|A}$ dans les statistiques de test.

9.8.1. Contrastes

Modèle à effets fixes

Dans le cas d'un modèle où les deux facteurs sont à effets fixes, c'est-à-dire le cas envisagé au paragraphe 3.1.2, il peut être intéressant, en fonction de la significativité des différents tests auxquels nous avons procédé, d'étudier les constrastes exposés ci-dessous.

Le contraste met en jeu des moyennes associées au premier facteur A.

$$L = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_I\alpha_I,$$

avec $\sum_{i=1}^{I} l_i = 0$.
Un estimateur sans biais de L est alors :

$$\widehat{L} = l_1\widehat{\alpha_1} + l_2\widehat{\alpha_2} + \cdots + l_I\widehat{\alpha_I}.$$

Ainsi une estimation sans biais de L s'écrit :

$$\widehat{L}(\boldsymbol{y}) = l_1 y_{1,\bullet,\bullet} + l_2 y_{2,\bullet,\bullet} + \cdots + l_I y_{I,\bullet,\bullet}.$$

Le contraste met en jeu des moyennes associées au second facteur B emboîté dans le premier facteur A.

$$L^{'} = l^{'}_{1(1)}\beta_{1(1)} + l^{'}_{2(1)}\beta_{1(1)} + \cdots + l^{'}_{J(I)}\beta_{J(I)},$$

avec $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} l^{'}_{j(i)} = 0$.
Un estimateur sans biais de $L^{'}$ est alors :

$$\widehat{L^{'}} = l^{'}_{1(1)}\widehat{\beta_{1(1)}} + l^{'}_{2(1)}\widehat{\beta_{2(1)}} + \cdots + l^{'}_{J(I)}\widehat{\beta_{J(I)}}.$$

Ainsi une estimation sans biais de $L^{'}$ s'écrit :

$$\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y}) = l^{'}_{1(1)} y_{1,1,\bullet} + l^{'}_{2(1)} y_{2,1,\bullet} + \cdots + l^{'}_{J(I)} y_{J,I,\bullet}.$$

Modèle à effets mixtes

Dans le cas d'un modèle mixte, c'est-à-dire le cas envisagé au paragraphe 3.3.2, il peut être intéressant, en fonction de la significativité du test de l'effet du facteur à effets fixes, d'étudier les constrastes du type :

$$L = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_I\alpha_I,$$

avec $\sum_{i=1}^{I} l_i = 0$.
Un estimateur sans biais de L est alors :

$$\widehat{L} = l_1\widehat{\alpha_1} + l_2\widehat{\alpha_2} + \cdots + l_I\widehat{\alpha_I}.$$

Ainsi une estimation sans biais de $L^{'}$ s'écrit :

$$\widehat{L}(\boldsymbol{y}) = l_1 y_{1,\bullet,\bullet} + l_2 y_{2,\bullet,\bullet} + \cdots + l_I y_{I,\bullet,\bullet}.$$

9.8.2. Méthode de Tukey

Modèle à effets fixes

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en I et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{s_R^2}{JK}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I, IJ(K-1); 1-\alpha).$$

où $q(I, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées aux niveaux du facteur B pour un niveau i du facteur A fixé, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en J et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_R^2}{K}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left|l_j^{'}\right|\right)}} \geqslant q(J, IJ(K-1); 1-\alpha).$$

où $q(J, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à J et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

Modèle à effets mixtes

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation $s_{B|A}^2$ calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de l'étendue Studentisées en I et $I(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\frac{s_{B|A}^2}{JK}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)}} \geqslant q(I, I(J-1); 1-\alpha).$$

où $q(I, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de l'étendue Studentisée à I et $I(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

9.8.3. Méthode de Scheffé

Modèle à effets fixes

L_{AB} est significativement différent de 0 au seuil α si, en supposant que $y_{i,j,\bullet} \geqslant y_{i^{'},j^{'},\bullet}$, nous avons :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{(IJ-1)\frac{2s_R^2}{K}}} \geqslant \sqrt{F(IJ-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(IJ-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L_{AB} et 0 au seuil α.

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $I-1$ et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(I-1)s_R^2}{JK}\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i^2}} \geqslant \sqrt{F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

De même si le contraste $L^{'}$ met en jeu des moyennes associées aux niveaux du facteur B pour un niveau i du facteur A fixé, nous utilisons l'estimation s_R^2 calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $J-1$ et $IJ(K-1)$.
Nous décidons que le contraste $L^{'}$ est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L^{'}}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(J-1)s_R^2}{K}\displaystyle\sum_{j=1}^{J} l_j^{'2}}} \geqslant \sqrt{F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)},$$

où $F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre $L^{'}$ et 0 au seuil α.

Modèle à effets mixtes

Si un contraste L met en jeu des moyennes associées au facteur A à effets fixes, nous utilisons l'estimation $s_{B|A}^2$ calculée pour le modèle incluant les deux facteurs et nous changeons le nombre de degrés de liberté de la loi de Fisher en $I-1$ et $I(J-1)$.
Nous décidons que le contraste L est significativement différent de 0 au seuil α si :

$$\frac{\left|\widehat{L}(\boldsymbol{y})\right|}{\sqrt{\dfrac{(I-1)s_{B|A}^2}{JK}\displaystyle\sum_{i=1}^{I} l_i^2}} \geqslant F(I-1, I(J-1); 1-\alpha).$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à I et $I(J-1)$ degrés de liberté. Sinon nous ne pouvons rejeter l'hypothèse d'absence de différence entre L et 0 au seuil α.

9.8.4. Méthode de Bonferroni et méthodes associées

Nous adaptons ici, de manière similaire, la procédure de Bonferroni et toutes celles qui en découle.

Modèle à effets fixes

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini *k* de comparaisons** de contrastes associés au facteur A nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s_R^2}{JK}\left(\sum_{i=1}^{I} l_i^2\right)}$$

à la place de

$$q(I,IJ(K-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{JK}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)$$

où $t(IJ(K-1);1-\dfrac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini *k*$'$ de comparaisons** de contrastes associés aux niveaux du facteur B pour un niveau i du facteur A fixé nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t(IJ(K-1);1-\frac{\alpha}{2k'})\sqrt{\frac{s_R^2}{K}\left(\sum_{j=1}^{J} l_j'^2\right)}$$

à la place de

$$q(J,IJ(K-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_R^2}{K}}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}|l_j|\right)$$

où $t(IJ(K-1);1-\dfrac{\alpha}{2k'})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k'})$ quantile de la loi de Student à $IJ(K-1)$ degrés de liberté.

Modèle à effets mixtes

Si nous souhaitons réaliser **un nombre fini *k* de comparaisons** de contrastes associés au facteur A nous pourrons utiliser la valeur critique

$$t(I(J-1);1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s_{B|A}^2}{JK}\left(\sum_{i=1}^{I} l_i^2\right)}$$

à la place de

$$q(I,I(J-1);1-\alpha)\sqrt{\frac{s_{B|A}^2}{JK}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}|l_i|\right)$$

où $t(I(J-1); 1-\dfrac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $I(J-1)$ degrés de liberté.

Ainsi dans le cas de comparaisons deux à deux des effets des modalités du facteur A à effets fixes la valeur critique que nous utiliserons avec la procédure de Bonferroni est :

$$\sqrt{2}\; t(I(J-1); 1-\frac{\alpha}{2k})\sqrt{\frac{s^2_{B|A}}{JK}}$$

où $t(I(J-1); 1-\dfrac{\alpha}{2k})$ est le $100(1-\dfrac{\alpha}{2k})$ quantile de la loi de Student à $I(J-1)$ degrés de liberté.

9.8.5. Cas d'un plan non équilibré et des comparaisons deux à deux

Dans les deux situations, effets fixes ou mixtes, nous pouvons utiliser la procédure de Tukey en remplaçant le nombre de répétitions K par la moyenne harmonique K_h du nombre de répétitions K_i et $K_{i'}$ effectuées dans chacune des deux conditions dont nous souhaitons comparer les effets. Nous rappelons l'expression de K_h :

$$K_h = \frac{1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{K_i} + \dfrac{1}{K_{i'}}\right)}.$$

Chapitre 10

Puissance des tests de l'analyse de la variance

Les moyens de calculs désormais à la disposition de l'expérimentateur permettent de calculer directement, c'est-à-dire sans avoir à recourir à une table ou à un abaque, la puissance des tests, dits F ou de Fisher, de l'analyse de la variance. Si nécessaire, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [Dag98b] pour consulter la plupart des tables ou abaques servant au calcul de la puissance d'un test dans un tableau d'analyse de la variance.

La puissance d'un test est une fonction complexe des différents paramètres de ce test. Nous soulignons certaines relations qu'il faut toujours avoir à l'esprit :

- Les erreurs de première espèce et de deuxième espèce sont antagonistes, c'est-à-dire qu'elles évoluent en sens contraire. Si les autres paramètres du test sont fixés, plus nous diminuons le risque de commettre une erreur de première espèce, plus nous augmentons celui de commettre une erreur de deuxième espèce et réciproquement plus nous diminuons le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, plus nous augmentons celui de commettre une erreur de première espèce.
- Plus les effets du facteur sont marqués, soit en terme d'amplitude des écarts entre les modalités d'un facteur à effets fixes ou soit en terme de dispersion des effets des modalités d'un facteur à effets aléatoires, plus la puissance est grande.
- Plus la dispersion de l'erreur est faible, plus la puissance est grande.
- Plus le nombre de répétitions effectuées pour une modalité du facteur est important plus la puissance est grande.

Parmi tous les paramètres ci-dessous, le seuil du test α étant fixé, il n'est possible pour l'expérimentateur que d'agir sur le nombre de répétitions effectuées pour une modalité du facteur. C'est pourquoi l'expérimentateur a un intérêt particulier à bien choisir ce paramètre lorsqu'il élabore le protocole expérimental dont il va servir s'il souhaite garantir un niveau de puissance correct pour les tests qu'il va réaliser.

10.1. Analyse de la variance à un facteur

10.1.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 2.1. Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, I(J-1); \lambda) > F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, I(J-1); \lambda_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité λ_A. Ce paramètre de non-centralité λ vaut :

$$\lambda_A = \frac{J}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2.$$

Lorsque nous utilisons une loi de Fisher non centrale à ν_1 et ν_2 degrés de liberté et de paramètre de non-centralité λ, nous introduisons souvent le paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A défini par :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{2\lambda_A}{v_1+1}}.$$

Nous obtenons ainsi dans notre situation :

$$\begin{aligned}
\phi_A &= \sqrt{\frac{2\lambda_A}{v_1+1}} \\
&= \sqrt{\frac{2\dfrac{J}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I-1+1}} \\
&= \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{J}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.
\end{aligned}$$

Si le nombre de répétitions n_i effectué pour chaque modalité A_i du facteur A n'est pas constant, c'est-à-dire si le plan expérimental n'est pas équilibré, le paramètre de non-centralité λ_A devient :

$$\lambda_A = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}n_i\alpha_i^2.$$

Le paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A est alors :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} n_i\alpha_i^2}.$$

Nous constatons que la puissance évolue bien comme indiqué au début de cette lorsque α_i, $1 \leqslant i \leqslant I$, I, n_i, $1 \leqslant i \leqslant I$, σ et α varient.

Puissance *a posteriori*

Nous obtenons la puissance ***a posteriori*** du test de l'absence d'effet du facteur A en remplaçant dans la formule appropriée ci-dessus. Le choix se fait en fonction du fait que le plan expérimental est équilibré ou non, les valeurs des paramètres par les estimations que nous avons obtenues en réalisant l'analyse de la variance. Généralement nous considérons qu'une puissance de 0,8 est satisfaisante et qu'alors la décision de ne pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est « vraiment » associée à l'absence d'effet du facteur considéré.

Détermination du nombre de répétitions

Une autre approche, celle développée lorsque nous faisons de la planification expérimentale, serait de déterminer *a priori* le nombre de répétitions J nécessaires pour obtenir une valeur de puissance du test supérieure à un niveau fixé à l'avance. L'intérêt de cette démarche réside dans le fait que nous ne connaissons pas a priori si le test que nous allons réaliser une fois que les expériences ont été réalisées sera significatif ou non à un seuil α % fixé à l'avance. Le fait de ne pas rejeter l'hypothèse nulle en ayant un risque élevé de commettre une erreur de deuxième rendrait cette décision très peu fiable et ne permettrait pas de conclure avec une confiance suffisante à l'absence d'un effet du facteur étudié sur la réponse. C'est pourquoi dans de nombreux domaines comme les études cliniques, où les expériences peuvent durer plusieurs années, il est primordial de s'assurer que si une différence existe il y aura un faible risque de ne pas la mettre en évidence. Généralement nous considérons qu'une puissance de 0,8 est satisfaisante ; dans certains cas nous visons même une puissance de 0,9.

Nous pouvons utiliser directement la formule ci-dessus pour déterminer le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un valeur minimale de puissance. Il faut néanmoins avoir une idée de la valeur minimale que peut prendre la somme $\sum_{i=1}^{I} n_i\alpha_i^2$ et la valeur maximale que peut avoir σ^2. Ces valeurs doivent être déterminées par un expert du domaine considéré.

Détermination du nombre de répétitions à l'aide de la plus petite différence détectable

Dans ce type d'étude prospective, la situation est compliquée par le fait qu'il est difficile d'évaluer le terme $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2$. Nous introduisons alors le concept de plus petite différence détectable Δ, ce qui revient à évaluer le sensibilité du test en terme d'amplitude entre les effets des différents niveaux du facteur étudié. Ainsi nous chercherons à ce que la probabilité de détecter une amplitude $|\alpha_i - \alpha_j|$ entre les effets α_i et α_j de deux modalités A_i et

A_j différentes du facteur étudié strictement supérieure à Δ soit élevée.

Ainsi pour faire le calcul de la puissance nous nous plaçons dans le pire des cas, c'est-à-dire celui pour lequel tous les effets sont nuls sauf deux α_{i_0} et α_{j_0} pour lesquels il existe un écart en valeur absolue égal à Δ. Alors $|\alpha_{i_0}| = |\alpha_{j_0}| = \Delta/2$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \frac{J}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2\\ &= \frac{J}{2\sigma^2}\left(\alpha_{i_0}^2+\alpha_{j_0}^2\right)\\ &= \frac{J}{2\sigma^2}\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right)\\ &= \frac{J}{4\sigma^2}\Delta^2.\end{aligned}$$

Nous utilisons la formule ci-dessus pour déterminer les valeurs de J pour lesquelles la puissance $1-\beta_A$ est supérieure à une valeur $1-\beta_{A,0}$ fixée à l'avance, généralement 0,8 soit 80 %. Remarquons que là encore il est nécessaire de connaître σ^2 ou au moins d'avoir une idée précise de la valeur de ce paramètre ce qui n'est malheureusement généralement pas le cas. Dans cette situation nous considérons plutôt le paramètre de sensibilité Δ/σ à la place de Δ.

10.1.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 2.2. Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(I-1, I(J-1)) > \frac{F(I-1,I(J-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{J\sigma_A^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(I-1,I(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F(I-1,I(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté.

Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1+\frac{J\sigma_A^2}{\sigma^2}}.$$

La différence fondamentale entre ce cas et le cas où le facteur est à effets fixes, exposés au paragraphe 10.1.1, est que le calcul de la puissance repose une loi de Fisher et non sur une loi de Fisher non-centrale.

Puissance *a posteriori*

Nous obtenons alors la puissance ***a posteriori*** du test de l'absence d'effet du facteur A en remplaçant dans la formule appropriée ci-dessus, le choix se fait en fonction du fait que le plan expérimental est équilibré ou non, les valeurs paramètres par les estimations que nous avons obtenues en réalisant l'analyse de la variance. Généralement nous considérons qu'une puissance de 0,8 est satisfaisante et qu'alors la décision de ne pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est « vraiment » associée à l'absence d'effet du facteur considéré.

10.2. Analyse de la variance à deux facteurs sans interaction

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.2.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.1.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1,(I-1)(J-1);\phi_A) > F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1,(I-1)(J-1);\phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{J}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F^{'}(J-1,(I-1)(J-1);\phi_B) > F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)\right],$$

où $F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(J-1,(I-1)(J-1);\phi_B)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_B. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_B vaut :

$$\phi_B = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{I}{J}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2}.$$

10.2.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.2.1. Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(I-1,(I-1)(J-1)) > \frac{F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{J\sigma_A^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F(I-1,(I-1)(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1 + \frac{J\sigma_A^2}{\sigma^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1,(I-1)(J-1)) > \frac{F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)}{1 + \dfrac{I\sigma_B^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(J-1)$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F(J-1,(I-1)(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1 + \frac{I\sigma_B^2}{\sigma^2}}.$$

La différence fondamentale entre ce cas et le cas où le facteur est à effets fixes, exposé au paragraphe 10.2.1, est que le calcul de la puissance repose une loi de Fisher et non sur une loi de Fisher non-centrale.

10.2.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.3.1. Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,\ldots,I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_A = \mathbb{P}\left[F'(I-1,(I-1)(J-1);\phi_A) > F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F'(I-1,I(J-1);\phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{J}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1,(I-1)(J-1)) > \frac{F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{I\sigma_B^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(J-1)$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F(J-1,(I-1)(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1+\frac{I\sigma_B^2}{\sigma^2}}.$$

Les puissances des tests sont donc identiques à celles où le facteur à effets fixes serait avec un autre facteur à effets fixes et le facteur à effets aléatoires serait avec un autre facteur à effets aléatoires.

10.3. Analyse de la variance à deux facteurs avec interaction

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.3.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.1.2.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,\ldots,I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A) > F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{JK}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } j_0 \in \{1,2,\ldots,J\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F^{'}(J-1, IJ(K-1); \phi_B) > F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(J-1, IJ(K-1); \phi_B)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_B. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_B vaut :

$$\phi_B = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{IK}{J}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1,2,\ldots,I\} \times \{1,2,\ldots,J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB}=\mathbb{P}\left[F'((I-1)(J-1),IJ(K-1);\phi_{AB})>F((I-1)(J-1),IJ(K-1);1-\alpha)\right],$$

où $F((I-1)(J-1),IJ(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F'((I-1)(J-1),IJ(K-1);\phi_{AB})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB} vaut :

$$\phi_{AB}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)^2_{i,j}}{(I-1)(J-1)+1}}.$$

10.3.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.2.2.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_A=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_A\neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A=\mathbb{P}\left[F(I-1,(I-1)(J-1))>\frac{F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{JK\sigma^2_A}{\sigma^2+K\sigma^2_{AB}}}\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F(I-1,(I-1)(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A=\sqrt{1+\frac{JK\sigma^2_A}{\sigma^2+K\sigma^2_{AB}}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_B=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_B\neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1,(I-1)(J-1)) > \frac{F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2+K\sigma_{AB}^2}}\right],$$

où $F(J-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(J-1)$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F(J-1,(I-1)(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1+\frac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2+K\sigma_{AB}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F((I-1)(J-1),IJ(K-1)) > \frac{F((I-1)(J-1),IJ(K-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F((I-1)(J-1),IJ(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1),IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1+\frac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}.$$

La différence fondamentale entre ce cas et le cas où le facteur est à effets fixes, exposé au paragraphe 3.1.2, est que le calcul de la puissance repose une loi de Fisher et non sur une loi de Fisher non-centrale.

10.3.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 3.3.2.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, (I-1)(J-1); \phi_A) > F(I-1, (I-1)(J-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, (I-1)(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, I(J-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{JK \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2}{I\left(\sigma^2 + K\sigma_{AB}^2\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1, IJ(K-1)) > \frac{F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)}{1 + \dfrac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2 + K\sigma_{AB}^2}}\right],$$

où $F(J-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F(J-1, IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $J-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1 + \frac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2 + K\sigma_{AB}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F((I-1)(J-1), IJ(K-1)) > \frac{F((I-1)(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)}{1+\dfrac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F((I-1)(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1), IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1+\frac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}.$$

Les puissances des tests sont donc identiques à celles où le facteur à effets fixes serait avec un autre facteur à effets fixes, le facteur à effets aléatoires serait avec un autre facteur à effets aléatoires et l'interaction dans un modèle où les deux facteurs seraient aléatoires.

10.4. Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.4.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 4.1.1. Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A) > F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{JK}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F^{'}(I(J-1), IJ(K-1); \phi_{B(A)}) > F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I(J-1), IJ(K-1); \phi_{B(A)})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$. Ce paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$ vaut :

$$\phi_{B(A)} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\beta_{j(i)}^2}{I(J-1)+1}}.$$

10.4.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 4.2.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(I-1, I(J-1)) > \frac{F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)}{1+\dfrac{JK\sigma_A^2}{\sigma^2+K\sigma_{B|A}^2}}\right],$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F(I-1, I(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1 + \frac{JK\sigma_A^2}{\sigma^2 + K\sigma_{B|A}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F(I(J-1), IJ(K-1)) > \frac{F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)}{1 + \dfrac{K\sigma_{B|A}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F(I(J-1), IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{B(A)}$ suivante :

$$\lambda_{B(A)} = \sqrt{1 + \frac{K\sigma_{B|A}^2}{\sigma^2}}.$$

10.4.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 4.3.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, I(J-1); \phi_A) > F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, I(J-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de

Fisher non-centrale à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{JK\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I\left(\sigma^2 + K\sigma^2_{B|A}\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_{B|A} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F(I(J-1), IJ(K-1)) > \frac{F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)}{1+K\dfrac{\sigma^2_{B|A}}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F(I(J-1), IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{B(A)}$ suivante :

$$\lambda_{B(A)} = \sqrt{1+K\frac{\sigma^2_{B|A}}{\sigma^2}}.$$

10.5. Analyse de la variance à trois facteurs sans interaction

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.5.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.1.1.

Pour des problèmes de concision nous ne présenterons que la puissance d'un type de test, effet principal, interaction d'ordre 1, interaction d'ordre 2, les valeurs de puissance associées aux tests restants s'en déduisant en remplaçant les quantités associées aux facteurs mis en jeu par celles associées aux facteurs pour lesquels nous voulons calculer la puissance du test.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_A) > F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = I-1$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F(I-1, (I-1)(J-1)(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, (I-1)(J-1)(K-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{JK}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_{AB}) > F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1), (I-1)(J-1)(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}((I-1)(J-1), (I-1)(J-1)(K-1); \phi_{AB})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB} vaut :

$$\phi_{AB} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{K\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(I-1)(J-1)+1}}.$$

10.5.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.2.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

La loi de la statistique de ce test n'est connue que de manière approximative. Nous pouvons néanmoins calculer la puissance de ce pseudo test F.
Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{JK\sigma_A^2}{\sigma^2+K\sigma_{AB}^2}}\right],$$

où $\nu_1 = I-1$ et

$$\nu_2 = \frac{\left(s_{AB}^2+s_{AC}^2-s_R^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)}+\dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)}+\dfrac{\left(s_R^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}},$$

$F(I-1,\nu_2;1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et ν_2 degrés de liberté et $F(I-1,\nu_2)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et ν_2 degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1+\frac{JK\sigma_A^2}{\sigma^2+K\sigma_{AB}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1 + \frac{K\sigma^2_{AB}}{\sigma^2}}.$$

La différence fondamentale entre ce cas et le cas où le facteur est à effets fixes, exposés au paragraphe 10.5.1, est que le calcul de la puissance repose une loi de Fisher et non sur une loi de Fisher non-centrale.

10.5.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.3.1.

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes, A et B, et un facteur C est à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,\ldots,I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1,(I-1)(K-1);\phi_A) > F(I-1,(I-1)(K-1);1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1,(I-1)(K-1);\phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{JK\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I\left(\sigma^2 + J\sigma^2_{AC}\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_C$, où β_C est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_C = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_C \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_C$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_C = \mathbb{P}\left[F(K-1,(I-1)(J-1)(K-1)) > \frac{F(K-1,(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{IJ\sigma_C^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(K-1,(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $K-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F(K-1,(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_C suivante :

$$\lambda_C = \sqrt{1+\frac{IJ\sigma_C^2}{\sigma^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0,j_0) \in \{1,2,\ldots,I\}\times\{1,2,\ldots,J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1,\nu_2;\phi_{AB}) > F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);\phi_{AB})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB} vaut :

$$\phi_{AB} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{K\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(I-1)(J-1)+1}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AC}$, où β_{AC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AC}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AC}=\mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2)>\frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{J\sigma^2_{AC}}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1=(I-1)(K-1)$ et $\nu_2=(I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(K-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(K-1),(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AC} suivante :

$$\lambda_{AC}=\sqrt{1+\frac{J\sigma^2_{AC}}{\sigma^2}}.$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_I=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0\in\{1,2,\ldots,I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0}\neq 0.}$$

La loi de la statistique de ce test n'est connue que de manière approximative. Nous pouvons néanmoins calculer la puissance de ce pseudo test F.
Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A=\mathbb{P}\left[F'(\nu_1,\nu_2,\phi_A)>F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1=I-1$ et

$$\nu_2=\frac{\left(s^2_{AB}+s^2_{AC}-s^2_R\right)^2}{\dfrac{\left(s^2_{AB}\right)^2}{(I-1)(J-1)}+\dfrac{\left(s^2_{AC}\right)^2}{(I-1)(K-1)}+\dfrac{\left(s^2_{R}\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}},$$

$F(I-1,\nu_2;1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et ν_2 degrés de liberté et $F'(I-1,\nu_2)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et ν_2 degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A=\sqrt{\frac{1}{I}\frac{JK\sum\limits_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{\sigma^2+K\sigma^2_{AB}+J\sigma^2_{AC}}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_B^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_B^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1,(J-1)(K-1)) > \frac{F(J-1,(J-1)(K-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2+I\sigma_{BC}^2}}\right],$$

où $F(J-1,(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F(J-1,(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1+\frac{IK\sigma_B^2}{\sigma^2+I\sigma_{BC}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1=(I-1)(J-1)$ et $\nu_2=(I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1+\frac{K\sigma_{AB}^2}{\sigma^2}}.$$

10.6. Analyse de la variance à trois facteurs avec interaction

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.6.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.1.2.

Pour des problèmes de concision nous ne présenterons que la puissance d'un type de test, effet principal, interaction d'ordre 1, interaction d'ordre 2, les valeurs de puissance associées aux tests restants s'en déduisant en remplaçant les quantités associées aux facteurs mis en jeu par celles associées aux facteurs pour lesquels nous voulons calculer la puissance du test.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_A) > F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = I-1$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F(I-1, IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, IJK(L-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{JKL}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_{AB}) > F(\nu_1, \nu_2; 1 - \alpha)\right],$$

où $\nu_1 = (I - 1)(J - 1)$ et $\nu_2 = IJK(L - 1)$, $F((I - 1)(J - 1), IJK(L - 1); 1 - \alpha)$ est le $100(1 - \alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I - 1)(J - 1)$ et $IJK(L - 1)$ degrés de liberté et $F^{'}((I - 1)(J - 1), IJK(L - 1); \phi_{AB})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I - 1)(J - 1)$ et $IJK(L - 1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB} vaut :

$$\phi_{AB} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)^2_{ij}}{(I - 1)(J - 1) + 1}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_{ABC}$, où β_{ABC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta\gamma)_{1,1,1} = (\alpha\beta\gamma)_{1,1,2} = \cdots = (\alpha\beta\gamma)_{1,1,K} = (\alpha\beta\gamma)_{2,1,1} = \cdots = (\alpha\beta\gamma)_{I,J,K} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \exists\ (i_0, j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \mid (\alpha\beta\gamma)_{i_0,j_0,k_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_{ABC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_{ABC} = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_{ABC}) > F(\nu_1, \nu_2; 1 - \alpha)\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)(K-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F((I-1)(J-1)(K-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}((I - 1)(J - 1)(K - 1), IJK(L - 1); \phi_{ABC})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I - 1)(J - 1)(K - 1)$ et $IJK(L - 1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{ABC}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{ABC} vaut :

$$\phi_{ABC} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(\alpha\beta\gamma)^2_{ijk}}{(I - 1)(J - 1)(K - 1) + 1}}.$$

10.6.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.2.2.

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

La loi de la statistique de ce test n'est connue que de manière approximative. Nous pouvons néanmoins calculer la puissance de ce pseudo test F.
Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{JKL\sigma_A^2}{\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2+KL\sigma_{AB}^2+JL\sigma_{AC}^2}}\right],$$

où $\nu_1 = I-1$ et

$$\nu_2 = \frac{\left(s_{AB}^2+s_{AC}^2-s_{ABC}^2\right)^2}{\dfrac{\left(s_{AB}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)}+\dfrac{\left(s_{AC}^2\right)^2}{(I-1)(K-1)}+\dfrac{\left(s_{ABC}^2\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}},$$

$F(I-1,\nu_2;1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et ν_2 degrés de liberté et $F(I-1,\nu_2)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et ν_2 degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1+\frac{JKL\sigma_A^2}{\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2+KL\sigma_{AB}^2+JL\sigma_{AC}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{KL\sigma_{AB}^2}{\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2}}\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1 + \frac{KL\sigma^2_{AB}}{\sigma^2 + L\sigma^2_{ABC}}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_{ABC}$, où β_{ABC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{ABC} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_{ABC} \neq 0.}$$

Cette puissance $1 - \beta_{ABC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_{ABC} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1, \nu_2) > \frac{F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)}{1 + \dfrac{L\sigma^2_{ABC}}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)(K-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F((I-1)(J-1)(K-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1)(K-1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{ABC} suivante :

$$\lambda_{ABC} = \sqrt{1 + \frac{L\sigma^2_{ABC}}{\sigma^2}}.$$

La différence fondamentale entre ce cas et le cas où le facteur est à effets fixes, exposé au paragraphe 10.6.1, est que le calcul de la puissance repose une loi de Fisher et non sur une loi de Fisher non-centrale.

10.6.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 5.3.2.

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes, A et B, et un facteur C est à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1 - \beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A=\mathbb{P}\left[F^{'}(I-1,(I-1)(J-1);\phi_A)>F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1,(I-1)(J-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1,(I-1)(J-1);\phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $(I-1)(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A=\sqrt{\frac{JKL\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I\left(\sigma^2+JL\sigma_{AC}^2\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_C$, où β_C est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0\,:\,\sigma_C^2=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1\,:\,\sigma_C^2\neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_C$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_C=\mathbb{P}\left[F(K-1,IJK(L-1))>\frac{F(K-1,IJK(L-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{IJ\sigma_C^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $F(K-1,IJK(L-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $K-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F(K-1,IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $K-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_C suivante :

$$\lambda_C=\sqrt{1+\frac{IJ\sigma_C^2}{\sigma^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0\,:\,(\alpha\beta)_{1,1}=(\alpha\beta)_{1,2}=\cdots=(\alpha\beta)_{1,J}=(\alpha\beta)_{2,1}=\cdots=(\alpha\beta)_{I,J}=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1\,:\,\text{Il existe }(i_0,j_0)\in\{1,2,\ldots,I\}\times\{1,2,\ldots,J\}\text{ tel que }(\alpha\beta)_{i_0,j_0}\neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB}=\mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1,\nu_2;\phi_{AB})>F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)$ et $\nu_2 = (I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);\phi_{AB})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB}. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_{AB} vaut :

$$\phi_{AB} = \sqrt{\frac{KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij}^2}{((I-1)(J-1)+1)(\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AC}$, où β_{AC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AC}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AC} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{JL\sigma_{AC}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(K-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F((I-1)(K-1), IJK(L-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(K-1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AC} suivante :

$$\lambda_{AC} = \sqrt{1+\frac{JL\sigma_{AC}^2}{\sigma^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{ABC}$, où β_{ABC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{ABC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{ABC}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{ABC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{ABC} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{L\sigma_{ABC}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = (I-1)(J-1)(K-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F((I-1)(J-1)(K-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1)(K-1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{ABC} suivante :

$$\lambda_{ABC} = \sqrt{1 + \frac{L\sigma^2_{ABC}}{\sigma^2}}.$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du pseudo test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

La loi de la statistique de ce test n'est connue que de manière approximative. Nous pouvons néanmoins calculer la puissance de ce pseudo test F.
Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2, \phi_A) > F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = I-1$ et

$$\nu_2 = \frac{\left(s^2_{AB} + s^2_{AC} - s^2_{ABC}\right)^2}{\dfrac{\left(s^2_{AB}\right)^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left(s^2_{AC}\right)^2}{(I-1)(K-1)} + \dfrac{\left(s^2_{ABC}\right)^2}{(I-1)(J-1)(K-1)}},$$

$F(I-1, \nu_2; 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et ν_2 degrés de liberté et $F^{'}(I-1, \nu_2, \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et ν_2 degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{1}{I}\frac{JKL\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{\sigma^2 + L\sigma^2_{ABC} + KL\sigma^2_{AB} + JL\sigma^2_{AC}}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_B$, où β_B est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_B = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_B \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_B$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_B = \mathbb{P}\left[F(J-1,(J-1)(K-1)) > \frac{F(J-1,(J-1)(K-1);1-\alpha)}{1+\dfrac{IKL\sigma_B^2}{\sigma^2+IL\sigma_{BC}^2}}\right],$$

où $F(J-1,(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $J-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F(J-1,(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_B suivante :

$$\lambda_B = \sqrt{1+\frac{IKL\sigma_B^2}{\sigma^2+IL\sigma_{BC}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{AB}$, où β_{AB} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{AB}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{AB}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{AB}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{AB} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{KL\sigma_{AB}^2}{\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2}}\right],$$

où $\nu_1=(I-1)(J-1)$ et $\nu_2=(I-1)(J-1)(K-1)$, $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1),(I-1)(J-1)(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)$ et $(I-1)(J-1)(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{AB} suivante :

$$\lambda_{AB} = \sqrt{1+\frac{KL\sigma_{AB}^2}{\sigma^2+L\sigma_{ABC}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{BC}$, où β_{BC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{BC}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{BC}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{BC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{BC}=\mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2)>\frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+KL\dfrac{\sigma^2_{BC}}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1=(J-1)(K-1)$ et $\nu_2=IJK(L-1)$, $F((J-1)(K-1),IJK(L-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F((J-1)(K-1),IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{BC} suivante :

$$\lambda_{BC}=\sqrt{1+KL\frac{\sigma^2_{BC}}{\sigma^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{ABC}$, où β_{ABC} est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0:\sigma^2_{ABC}=0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1:\sigma^2_{ABC}\neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{ABC}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{ABC}=\mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2)>\frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{L\sigma^2_{ABC}}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1=(I-1)(J-1)(K-1)$ et $\nu_2=IJK(L-1)$, $F((I-1)(J-1)(K-1),IJK(L-1);1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F((I-1)(J-1)(K-1),IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $(I-1)(J-1)(K-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_{ABC} suivante :

$$\lambda_{ABC}=\sqrt{1+\frac{L\sigma^2_{ABC}}{\sigma^2}}.$$

10.7. Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés

Les idées développées dans la section 10.1 précédente sur le calcul de la puissance *a posteriori* ou la détermination du nombre de répétitions minimal pour obtenir un niveau de puissance supérieur ou égal à une valeur cible $1-\beta_0$ sont directement transférables aux tests étudiés dans cette section à condition de remplacer les formules par celles qui sont exposées ci-dessous.

La puissance calculée pour chacun des tests ne dépend pas du risque de première espèce fixé pour les autres tests. Ceci permettrait de calculer la puissance des tests du tableau de l'analyse de la variance même si le seuil de chaque test varie en fonction du test considéré. Voir le paragraphe 1.3 pour plus de détails sur la gestion des risques de première espèce des tests du tableau de l'analyse de la variance.

10.7.1. Modèle à effets fixes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 6.1.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, IJK(L-1); \phi_A) > F(I-1, IJK(L-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, IJK(L-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{JKL}{I}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F^{'}(I(J-1), IJK(L-1); \phi_{B(A)}) > F(I(J-1), IJK(L-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I(J-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I(J-1), IJK(L-1); \phi_B)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I(J-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$. Ce paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$ vaut :

$$\phi_{B(A)} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{KL\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\beta_{j(i)}^2}{I(J-1)+1}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{C(B(A))}$, où $\beta_{C(B(A))}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \gamma_{1(1(1))} = \gamma_{2(1(1))} = \cdots = \gamma_{K(1(1))} = \gamma_{1(1(2))} = \cdots = \gamma_{K(J(I))} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \exists\ (i_0, j_0, k_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \times \{1, 2, \ldots, K\} \mid \gamma_{k_0(j_0(i_0))} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{C(B(A))}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{C(B(A))} = \mathbb{P}\left[F^{'}(\nu_1, \nu_2; \phi_{C(B(A))}) > F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)\right],$$

où $\nu_1 = IJ(L-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F(IJ(L-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(IJ(L-1), IJK(L-1); \phi_{C(B(A))})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{C(B(A))}$. Ce paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{C(B(A))}$ vaut :

$$\phi_{C(B(A))} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{L\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\gamma_{k(j(i))}^2}{IJ(L-1)+1}}.$$

10.7.2. Modèle à effets aléatoires

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 6.2.1.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_A^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_A^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F(I-1, I(J-1)) > \frac{F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)}{1+\dfrac{JKL\sigma_A^2}{\sigma^2 + L\sigma_{C|B|A}^2 + KL\sigma_{B|A}^2}}\right],$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $(I-1)$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F(I-1, I(J-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité λ_A suivante :

$$\lambda_A = \sqrt{1 + \frac{JKL\sigma_A^2}{\sigma^2 + L\sigma_{C|B|A}^2 + KL\sigma_{B|A}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{B|A}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F(I(J-1), IJ(K-1)) > \frac{F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)}{1 + \dfrac{KL\sigma_{B|A}^2}{\sigma^2 + L\sigma C|B|A^2}}\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F(I(J-1), IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{B(A)}$ suivante :

$$\lambda_{B(A)} = \sqrt{1 + \frac{KL\sigma_{B|A}^2}{\sigma^2 + L\sigma C|B|A^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{C(B(A))}$, où $\beta_{C(B(A))}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{C|B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{C|B|A}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{C(B(A))}$ est donnée par la formule suivante :

$$1 - \beta_{C(B(A))} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1, \nu_2) > \frac{F(\nu_1, \nu_2; 1-\alpha)}{1 + \dfrac{L\sigma_{C|B|A}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = IJ(L-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F(IJ(L-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(IJ(L-$

$1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{C(B(A))}$ suivante :

$$\lambda_{C(B(A))} = \sqrt{1 + \frac{L\sigma^2_{C|B|A}}{\sigma^2}}.$$

10.7.3. Modèle à effets mixtes

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 6.3.

Premier cas : Deux facteurs sont à effets fixes et un facteur est à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, \ldots, I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A) > F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, IJ(K-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I-1$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{JKL\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I\left(\sigma^2 + K\sigma^2_{C|B|A}\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \beta_{1(1)} = \beta_{2(1)} = \cdots = \beta_{J(1)} = \beta_{1(2)} = \cdots = \beta_{J(I)} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } \beta_{j_0(i_0)} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F^{'}(I(J-1), IJ(K-1); \phi_{B(A)}) > F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I(J-1), IJ(K-1); \phi_{B(A)})$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher non-centrale à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$. Ce paramètre de non-centralité normalisé $\phi_{B(A)}$ vaut :

$$\phi_{B(A)} = \sqrt{\frac{KL}{I(J-1)+1} \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \beta_{j(i)}^2}{\sigma^2 + L\sigma_{C|B|A}^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{C(B(A))}$, où $\beta_{C(B(A))}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_{C|B|A}^2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma_{C|B|A}^2 \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{C(B(A))}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{C(B(A))} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2;1-\alpha)}{1+\dfrac{L\sigma_{C|B|A}^2}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = IJ(L-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F(IJ(L-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(IJ(L-1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{C(B(A))}$ suivante :

$$\lambda_{C(B(A))} = \sqrt{1+\frac{L\sigma_{C|B|A}^2}{\sigma^2}}.$$

Deuxième cas : Un facteur est à effets fixes et deux facteurs sont à effets aléatoires.

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_A$, où β_A est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,\ldots,I\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_A$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_A = \mathbb{P}\left[F^{'}(I-1, I(J-1); \phi_A) > F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)\right],$$

où $F(I-1, I(J-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et $F^{'}(I-1, I(J-1); \phi_A)$ est une variable aléatoire qui suit une loi de

Fisher non-centrale à $I-1$ et $I(J-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A. Ce paramètre de non-centralité normalisé ϕ_A vaut :

$$\phi_A = \sqrt{\frac{JKL\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2}{I\left(\sigma^2 + KL\sigma^2_{B|A} + L\sigma^2_{C|B|A}\right)}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{B(A)}$, où $\beta_{B(A)}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_{B|A} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{B(A)}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{B(A)} = \mathbb{P}\left[F(I(J-1), IJ(K-1)) > \frac{F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)}{1+\dfrac{KL\sigma^2_{B|A}}{\sigma^2 + L\sigma C|B|A^2}}\right],$$

où $F(I(J-1), IJ(K-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté et $F(I(J-1), IJ(K-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $I(J-1)$ et $IJ(K-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{B(A)}$ suivante :

$$\lambda_{B(A)} = \sqrt{1+\frac{KL\sigma^2_{B|A}}{\sigma^2 + L\sigma C|B|A^2}}.$$

Nous nous intéressons à la puissance $1-\beta_{C(B(A))}$, où $\beta_{C(B(A))}$ est le risque de commettre une erreur de deuxième espèce, du test F d'analyse de la variance pour le test de l'hypothèse

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{C|B|A} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \sigma^2_{C|B|A} \neq 0.}$$

Cette puissance $1-\beta_{C(B(A))}$ est donnée par la formule suivante :

$$1-\beta_{C(B(A))} = \mathbb{P}\left[F(\nu_1,\nu_2) > \frac{F(\nu_1,\nu_2; 1-\alpha)}{1+\dfrac{L\sigma^2_{C|B|A}}{\sigma^2}}\right],$$

où $\nu_1 = IJ(L-1)$ et $\nu_2 = IJK(L-1)$, $F(IJ(L-1), IJK(L-1); 1-\alpha)$ est le $100(1-\alpha)$ quantile de la loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté et $F'(IJ(L-$

$1), IJK(L-1))$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher à $IJ(L-1)$ et $IJK(L-1)$ degrés de liberté. Si nous cherchons à évaluer cette puissance à l'aide d'une table, nous serons le plus souvent amenés à évaluer la quantité $\lambda_{C(B(A))}$ suivante :

$$\lambda_{C(B(A))} = \sqrt{1 + \frac{L\sigma^2_{C|B|A}}{\sigma^2}}.$$

Chapitre 11

Exemples

11.1. Analyse de la variance à un facteur

11.1.1. Carburateurs [1]

Nous voulons tester quatre types de carburateurs : A_1, A_2, A_3 et A_4. Pour chaque type de carburateur nous disposons de six pièces qui sont montées successivement en parallèle sur quatre voitures que nous supposons avoir des caractéristiques parfaitement identiques. Le tableau ci-dessous indique pour chacun des essais la valeur d'un paramètre lié à la consommation :

Essai	A_1	A_2	A_3	A_4
1	21	23	18	20
2	24	23	19	21
3	25	32	28	25
4	20	23	19	15
5	34	32	24	29
6	17	15	14	9

Partie I :

Dans cette partie **nous ne tenons pas compte** de la possible influence de l'ordre dans lequel les essais ont été effectués.

Une représentation graphique de la *Consommation* en fonction du *Carburateur* est donnée par la figure ci-après.

a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier l'influence des modalités du facteur *Carburateur* sur la *Consommation*. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?

---

[1] Les données de cet exercice sont tirées du livre de Georges Parreins [Par74].

b) Il y a-t-il des différences entre les $Carburateur$? Quelles sont les estimations des coefficients du modèle ? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur $Carburateur$.

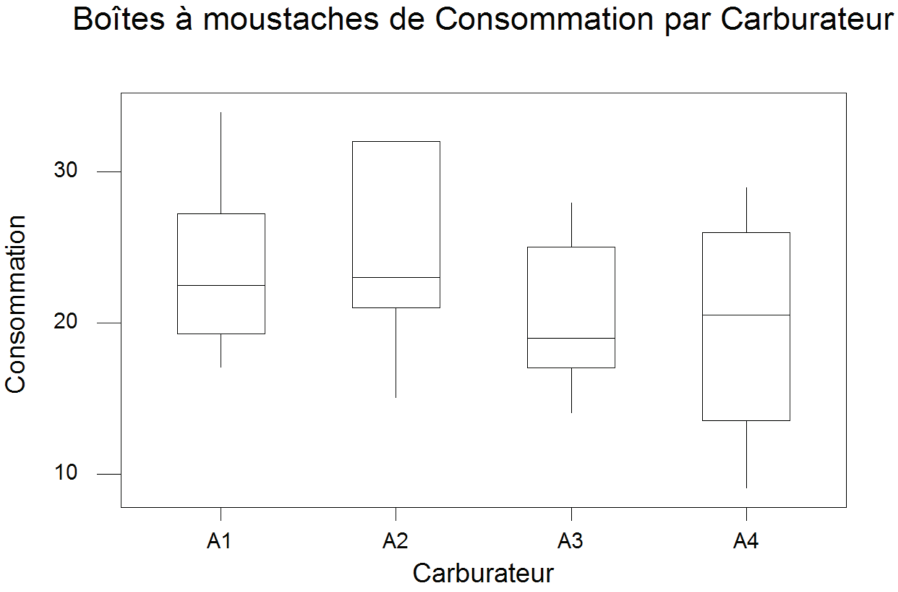


Figure 11.1 – **Graphique : Boite à moustaches des données**.

Éléments de corrigé : Carburateurs

Partie I :

Dans cette partie **nous ne tenons pas compte** de la possible influence de l'ordre dans lequel les essais ont été effectués.

a) La variable à expliquer, $Consommation$, est une variable continue. La variable explicative que nous considérons, le type de carburateur, $Carburateur$, est qualitative et contrôlée. Le plan qui a été utilisé pour réaliser l'expérience comporte des répétitions, nous pouvons donc essayer de nous servir d'un modèle d'analyse de la variance à un facteur contrôlé.

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots 4, \; j = 1 \ldots 6,$$

$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ la consommation de la voiture équipée du carburateur i lors du $j-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant j \leqslant 6,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j},\epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant 4, \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant 6.$$

Ce modèle comporte 6 répétitions pour chaque niveau du facteur. Il s'agit donc d'un plan expérimental équilibré.

b) Nous commençons par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question a) sont bien vérifiées. Pour cela nous calculons les résidus du modèle.

1. Le protocole expérimental indique que nous pouvons faire comme si chacun des 24 carburateurs utilisés au cours de l'expérience a été monté sur une même voiture. Nous supposons négligeable la dégradation des véhicules suite à leur utilisation répétée au cours de l'expérience. Ces considérations nous permettent de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j}$ sont indépendantes.
2. Nous effectuons un test d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Puisque nous ne connaissons pas la loi des erreurs, nous faisons un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur
Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,194
P :                   0,899
```

Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, il n'y a pas de différences significatives entre les variances des erreurs.

3. Nous nous intéressons désormais à la normalité des erreurs. Nous cherchons si nous pouvons faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

Nous utilisons alors le test de Ryan-Joiner :

```
W-test pour la normalité
R:                             0,9868
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1000$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil du test. Nous en déduisons que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5~\%$ et que nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5~\%$.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejétée à la question 3., nous nous intéressons à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur
Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 0,650
P :                   0,885
```

Le test n'est pas significatif car $0,885$ est strictement supérieur à $\alpha = 5~\%$. Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil $\alpha = 5~\%$.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à un facteur sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Carburateur* a un effet sur la *Consommation*. Nous testons donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,3,4\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

Nous consultons alors le tableau de l'analyse de la variance

```
Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Carburat     fixe       4  A1 A2 A3 A4

Analyse de la variance pour Consomma, en utilisant la SC
ajustée pour
les tests

Source     DL     SC séq   SC ajust   CM ajust       F      P
Carburat    3     100,83     100,83      33,61    0,89  0,464
Erreur     20     757,00     757,00      37,85
Total      23     857,83
```

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est de $0,464$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5~\%$: le test n'est pas significatif à ce seuil. Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation*. Ainsi au niveau $\alpha = 5~\%$, le facteur

Carburateur n'a pas d'effet significatif sur la *Consommation*. En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de deuxième espèce, il convient donc de calculer la puissance du test. À l'aide de l'entrée **ANOVA à un facteur contrôlé** du sous menu **Puissance et effectif de l'échantillon** du menu **Stat** de Minitab©, nous obtenons le résultat suivant :

```
Puissance et effectif de l'échantillon

ANOVA à un facteur contrôlé

Sigma = 6,152  Alpha = 0,05  Nombre de niveaux = 4

              Effectif de             Différence
Moyennes SC  l'échantillon  Puissance  maximale
    11,6838              6     0,1555  4,834
```

La *Différence maximale* correspond à l'écart le plus important en valeur absolue entre les estimations des différents niveaux du facteur. Ici c'est la valeur de $\widehat{A_4} - \widehat{A_2} = 4,834$ qui est la plus élevée. La puissance a posteriori est donc très faible : 0,1555 par rapport à la valeur de $0,80$ qui est considérée comme étant acceptable. Nous aurions pu améliorer la puissance du test en augmentant le nombre de répétitions.

```
Puissance et effectif de l'échantillon

ANOVA à un facteur contrôlé

Sigma = 6,152  Alpha = 0,05  Nombre de niveaux = 4

              Effectif de  Puissance  Puissance  Différence
Moyennes SC  l'échantillon      cible     réelle  maximale
    11,6838             37     0,8000     0,8084  4,834
```

Nous constatons qu'il aurait fallu 37 répétitions, donc 148 carburateurs, pour obtenir une puissance d'au moins 0,80. Nous aurions multiplié par plus de six l'ampleur de l'étude qui a été réalisée...

Les estimations des coefficients du modèle sont :

```
Terme          Coef      Er-T coef       T      P
Constante    22,083          1,256   17,58  0,000
Carburat
A1            1,417          2,175    0,65  0,522
A2            2,583          2,175    1,19  0,249
A3           -1,750          2,175   -0,80  0,431
```

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = 22,083, \quad & \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = 1,417, \quad && \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) = 2,583, \\ & \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y}) = -1,750, \quad && \widehat{\alpha_4}(\boldsymbol{y}) = -2,250, \end{aligned}$$

en utilisant la relation $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = 0$ qui se déduit de la relation vérifiée par les estimateurs $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i} = 0$.
Nous remarquons que c'est le carburateur A_4 qui fait consommer le moins de carburant. Toutefois, puisque nous n'avons pas pu rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* au seuil $\alpha = 5$ %, ce comportement n'est pas significativement différent des autres au seuil $\alpha = 5$ %.

Au seuil $\alpha = 5$ %, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* n'a pu être réfutée, **nous ne devons donc pas faire de comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Carburateur*.

11.2. Analyse de la variance à deux facteurs

11.2.1. Sans répétition

Carburateurs (suite et fin) [2]

Partie II :

Après avoir effectué l'analyse de la première partie nous apprenons que tous les essais numéro 1 ont été réalisés un lundi, tous les essais numéro 2 un mardi, . . ., tous les essais numéro 6 un samedi.

Nous décidons donc dans cette partie **de tenir compte** de la possible influence de l'ordre de réalisation des essais, c'est-à-dire du facteur *Essai*.

Une représentation graphique de la *Consommation* en fonction de *Essai* est donnée par la figure ci-dessous.

a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier conjointement l'influence du facteur *Carburateur* et du facteur *Essai* sur la consommation. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?

b) Il y a-t-il des différences entre les carburateurs ? Il y a-t-il des différences dues à l'ordre de réalisation des essais ? Quelles sont les estimations des paramètres du modèle ? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur *Carburateur* ainsi que les différents niveaux du facteur *Essai*.

. . . .

Éléments de corrigé : Carburateurs (suite et fin)

---

[2] Les données de cet exercice sont tirées du livre de Georges Parreins [Par74].

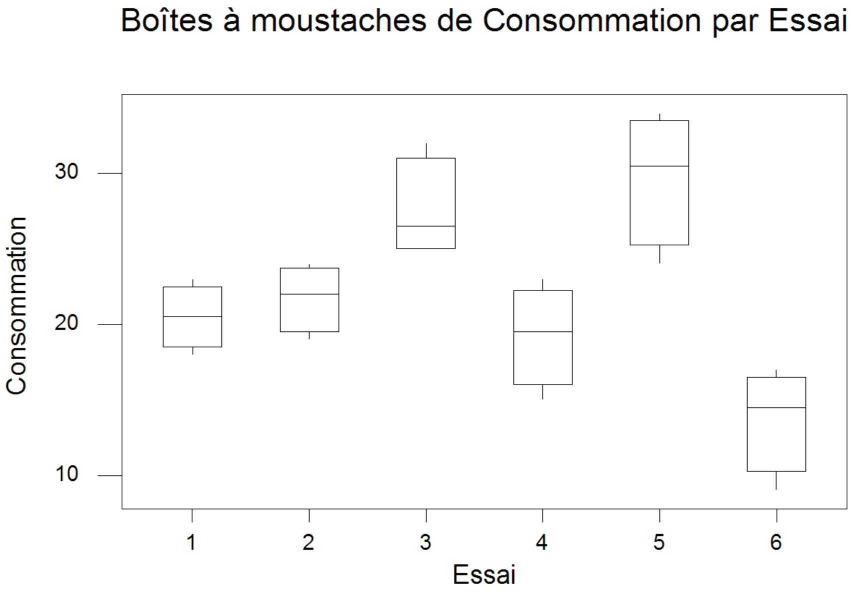


Figure 11.2 – **Graphique : Boite à moustaches des données**.

Partie II :

Après avoir effectué l'analyse de la première partie nous apprenons que tous les essais numéro 1 ont été réalisés un lundi, tous les essais numéro 2 un mardi, . . ., tous les essais numéro 6 un samedi.

Nous décidons donc dans cette partie **de tenir compte** de la possible influence de l'ordre de réalisation des essais, c'est-à-dire du facteur *Essai*.

a) La variable à expliquer, *Consommation*, est une variable continue. Les variables explicatives que nous considérons, le type de carburateur, *Carburateur*, et le jour de l'essai, *Essai*, sont qualitatives et contrôlées. Le plan qui a été utilisé pour réaliser l'expérience ne comporte pas de répétitions, nous pouvons donc essayer de nous servir d'un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés sans répétition.

   Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots 4,\ j = 1 \ldots 6,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{6} \beta_j = 0,$$

   où $Y_{i,j}$ la consommation de la voiture équipée du carburateur i lors du $j-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant j \leqslant 6,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant 4 \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant 6.$$

Ce modèle ne comporte aucune répétition pour aucun des niveaux du facteur. Il s'agit d'un plan expérimental équilibré.

b) Nous commençons par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question a) sont bien vérifiées. Pour cela nous calculons les résidus du modèle.

1. Le protocole expérimental indique que nous pouvons faire comme si chacun des 24 carburateurs utilisés au cours de l'expérience a été monté sur une même voiture. Nous supposons négligeable la dégradation des véhicules suite à leur utilisation répétée au cours de l'expérience. Ces considérations nous permettent de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j}$ sont indépendantes.
2. Il n'est pas possible de tester l'hypothèse d'égalité des variances des erreurs $\mathcal{H}_0$ ci-dessous à l'aide des données expérimentales dont nous disposons puisque le plan utilisé ne comporte pas de répétitions.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1} = \cdots = \sigma^2_{4,1} = \cdots = \sigma^2_{1,6} = \cdots = \sigma^2_{4,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Par contre nous savons que si l'hypothèse nulle globale $\mathcal{H}_0$ ci-dessus est vérifiée, alors chacune des deux hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Carburateur* et $\mathcal{H}_0^{''}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Essai* doivent l'être également. Nous effectuons deux tests d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma^2_{c,1} = \sigma^2_{c,2} = \sigma^2_{c,3} = \sigma^2_{c,4}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Carburateur.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_{e,1} = \sigma^2_{e,2} = \sigma^2_{e,3} = \sigma^2_{e,4} = \sigma^2_{e,5} = \sigma^2_{e,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Essai.}$$

Puisque nous ne connaissons pas la loi des erreurs, nous utilisons un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,842
P :                   0,487

Test de l'égalité des variances
Facteurs    Essai
```

```
Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,925
P :                   0,488
```

Puisque les $p-$valeurs des tests sont strictement supérieures au seuil $\alpha = 5$ %, les tests sont non significatifs et nous ne pouvons rejeter les hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ et $\mathcal{H}_0^{''}$.

3. Nous nous intéressons désormais à la normalité des erreurs. Nous cherchons si nous pouvons faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

Nous utilisons alors le test de Ryan-Joiner :

```
W-test pour la normalité
R:                               0,9725
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil α du test. Nous en déduisons que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5$ % et que nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5$ %.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejetée à la question 3., nous nous intéressons à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.

Pour les mêmes raisons qu'au 2., il n'est pas possible de tester l'hypothèse d'égalité des variances des erreurs $\mathcal{H}_0$:

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1} = \cdots = \sigma^2_{4,1} = \cdots = \sigma^2_{1,6} = \cdots = \sigma^2_{4,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Nous nous intéressons aux deux hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Carburateur* et $\mathcal{H}_0^{''}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Essai*. Nous effectuons deux tests d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma^2_{c,1} = \sigma^2_{c,2} = \sigma^2_{c,3} = \sigma^2_{c,4}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Carburateur.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_{e,1} = \sigma^2_{e,2} = \sigma^2_{e,3} = \sigma^2_{e,4} = \sigma^2_{e,5} = \sigma^2_{e,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Essai.}$$

Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 1,930
P :                   0,587
```

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Essai

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 3,525
P :                   0,620
```

Puisque les $p-$valeurs des tests sont strictement supérieures au seuil $\alpha = 5$ %, les tests sont non significatifs et nous ne pouvons rejeter les hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ et $\mathcal{H}_0^{''}$.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés sans répétition sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Carburateur* ou le facteur *Essai* a un effet sur la *Consommation*. Nous testons donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,3,4\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

Nous consultons alors le tableau de l'analyse de la variance

```
Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Carburat     fixe       4  A1 A2 A3 A4
Essai        fixe       6  1 2 3 4 5 6

Analyse de la variance pour Consomma, en utilisant la SC
ajustée pour
les tests

Source     DL     SC séq   SC ajust   CM ajust       F      P
Carburat    3    100,833    100,833     33,611    5,99  0,007
Essai       5    672,833    672,833    134,567   23,98  0,000
Erreur     15     84,167     84,167      5,611
Total      23    857,833
```

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est de $0,007$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. Nous devons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1^{'}$ d'existence d'un effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation.* Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Carburateur* a un effet significatif sur la *Consommation.* En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est de $0,000$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. Nous devons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ d'absence d'effet du facteur *Essai* sur la *Consommation* et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1^{''}$ d'existence d'un effet du facteur *Essai* sur la *Consommation.* Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Essai* a un effet significatif sur la *Consommation.* En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.

Nous constatons que, contrairement à ce que nous avions pu montrer dans la partie I, nous arrivons à mettre en évidence un effet du facteur *Carburateur* sur la consommation. Il semblait nécessaire de prendre en compte ce facteur supplémentaire, *Essai*, à la vue des boîtes à moustaches qui étaient reproduites dans l'énoncé. La variabilité importante associée au jour où l'essai a été réalisé, liée par exemple à la densité du traffic automobile, masquait les variations liées au facteur *Carburateur.*

Les estimations des coefficients du modèle sont :

```
Terme            Coef      Er-T coef        T      P
Constante     22,0833         0,4835    45,67  0,000
Carburat
A1             1,4167         0,8375     1,69  0,111
A2             2,5833         0,8375     3,08  0,008
A3            -1,7500         0,8375    -2,09  0,054
Essai
1              -1,583          1,081    -1,46  0,164
2              -0,333          1,081    -0,31  0,762
3               5,417          1,081     5,01  0,000
4              -2,833          1,081    -2,62  0,019
5               7,667          1,081     7,09  0,000
```

Nous en déduisons que :

$$\begin{array}{lll}
\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = 22,083, & \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = 1,417, & \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) = 2,583, \\
 & \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y}) = -1,750, & \widehat{\alpha_4}(\boldsymbol{y}) = -2,250, \\
\widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y}) = -1,583, & \widehat{\beta_2}(\boldsymbol{y}) = -0,333, & \widehat{\beta_3}(\boldsymbol{y}) = 5,417, \\
\widehat{\beta_4}(\boldsymbol{y}) = -2,833, & \widehat{\beta_5}(\boldsymbol{y}) = 7,667, & \widehat{\beta_6}(\boldsymbol{y}) = -8,335,
\end{array}$$

en utilisant les relations $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = 0$ et $\sum_{j=1}^{6} \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = 0$ qui sont des conséquences de celles vérifiées par les estimateurs $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i} = 0$ et $\sum_{j=1}^{6} \widehat{\beta_j} = 0$.

Nous remarquons que les estimations des coefficients associés aux carburateurs sont les mêmes que celles obtenues à la partie I. Il en va toujours de même lorsque le plan est équilibré.

Au seuil $\alpha = 5~\%$, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* a été rejetée, **nous pouvons donc faire des comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Carburateur*.

```
Tests de simultanéité de Tukey
Variable de réponse Consomma
Toutes comparaisons deux à deux entre niveaux de Carburat

Carburat = A1 soustraites de :

Niveau           Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A2                    1,167            1,368      0,853           0,8284
A3                   -3,167            1,368     -2,315           0,1385
A4                   -3,667            1,368     -2,681           0,0726

Carburat = A2 soustraites de :

Niveau           Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A3                   -4,333            1,368     -3,169           0,0290
A4                   -4,833            1,368     -3,534           0,0142

Carburat = A3 soustraites de :

Niveau           Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A4                  -0,5000            1,368    -0,3656           0,9827
```

Ainsi au seuil global de décision $\alpha_{global} = 5~\%$ les niveaux A_2 et A_3, A_2 et A_4 sont significativement différents, pour les autres l'hypothèse d'égalité ne peut être rejetée.

Nous avons représenté, dans l'ordre de gauche à droite sur la figure, les estimations des valeurs des niveaux A_3, A_1, A_4, A_2 du facteur *Carburateur*.

Au seuil $\alpha = 5~\%$, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ d'absence d'effet du facteur *Essai* sur la *Consommation* a été rejetée, **nous pouvons donc faire des comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Essai*.

```
Tests de simultanéité de Tukey
Variable de réponse Consomma
Toutes comparaisons deux à deux entre niveaux de Essai

Essai = 1 soustraites de :

Niveau        Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Essai       des moyennes   la différence       de T             de P
```

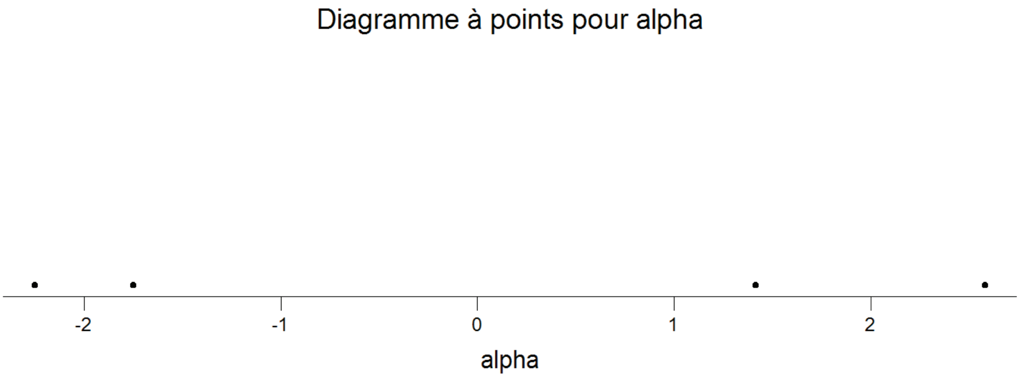


Figure 11.3 – **Graphique : Estimation des effets du facteur** *Carburateur*.

```
2                1,250           1,675     0,746           0,9725
3                7,000           1,675     4,179           0,0086
4               -1,250           1,675    -0,746           0,9725
5                9,250           1,675     5,522           0,0007
6               -6,750           1,675    -4,030           0,0114

Essai = 2 soustraites de :

Niveau        Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Essai       des moyennes   la différence       de T             de P
3                5,750           1,675     3,433           0,0355
4               -2,500           1,675    -1,493           0,6738
5                8,000           1,675     4,776           0,0027
6               -8,000           1,675    -4,776           0,0027

Essai = 3 soustraites de :

Niveau        Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Essai       des moyennes   la différence       de T             de P
4                -8,25           1,675    -4,925           0,0021
5                 2,25           1,675     1,343           0,7578
6               -13,75           1,675    -8,209           0,0000

Essai = 4 soustraites de :

Niveau        Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Essai       des moyennes   la différence       de T             de P
5               10,500           1,675     6,269           0,0002
6               -5,500           1,675    -3,284           0,0469

Essai = 5 soustraites de :
```

```
Niveau        Différence          Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Essai       des moyennes   la différence       de T             de P
6                 -16,00           1,675     -9,552           0,0000
```

Ainsi au seuil global de décision $\alpha_{global} = 5~\%$ les niveaux 1 et 3, 1 et 5, 2 et 3, 2 et 5, 2 et 6, 3 et 4, 3 et 6, 4 et 5, 5 et 6 sont significativement différents, pour les autres l'hypothèse d'égalité ne peut être rejetée.

Nous avons représenté, dans l'ordre de gauche à droite sur la figure, les estimations des valeurs des niveaux 4, 1, 2, 3, 5, 6 du facteur *Essai*.

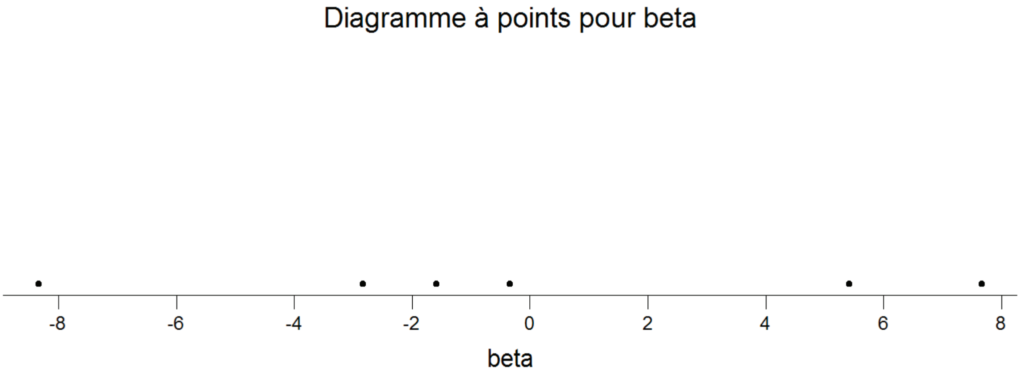


FIGURE 11.4 – **Graphique : Estimation des effets du facteur** *Essai*.

À l'aide de l'entrée **Graphique des effets principaux** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab©, nous obtenons la représentation graphique pertinente suivante :

La ligne en pointillé en rouge[3] est la valeur de l'estimation de la moyenne $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y})$. Les $\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y})$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, et les $\widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y})$, $1 \leqslant j \leqslant 6$, sont représentées par les valeurs des écarts à cette ligne.

. . . .

---

[3] En gris si vous lisez une version imprimée du corrigé de cet exercice.

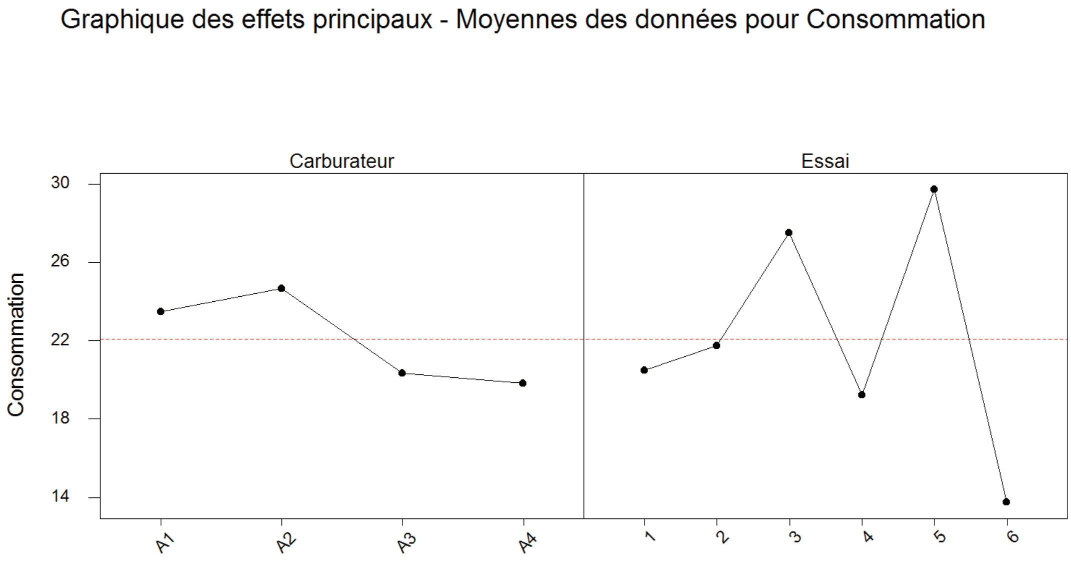


Figure 11.5 – **Graphique : Effets principaux**.

11.2.2. Avec répétitions et plan équilibré

Comparaison de l'appréciation de huit eaux gazeuses [4]

Un panel de 16 juges évalue 8 types différents d'eau gazeuze. Chaque évalue 4 fois chaque eau. Nous supposons que les hypothèses, relatives à l'utilisation du modèle d'analyse de la variance qui a permis d'obtenir les résultats reportés dans les tableaux ci-dessous, sont bien vérifiées.

1. Décrire succintement le jeu de données (nombre total d'observations, nature des variables, etc.)
2. Construire le test de significativité de l'interaction *eau* × *juge* (hypothèses, statistique de test, loi de cette statistique sous $\mathcal{H}_0$, décision à l'aide du tableau ci-dessous).
3. Commenter le tableau d'analyse de la variance ci-dessous.

	ddl	*SCE*	*CM*	f_{obs}	*Proba*
juge	15	731,3574	48,75716	25,03878	$5{,}91658\times10^{-48}$
eau	7	38,6543	5,52204	2,83579	0,006810201
juge : eau	105	508,5645	4,84347	2,48732	$1{,}19182\times10^{-10}$
Résiduelle	384	747,7500	1,94727		

4. L'estimation des coefficients pour la variable *eau* est fournie dans le listage ci-dessous. Quelle est la plus appréciée ? Lors d'un rassemblement avec beaucoup d'individus, utiliseriez-vous seulement cette eau ?

---

[4] Les données de cet exercice sont tirées du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès [HPer].

	Value	Std. Error	t value	$Pr(>\|t\|)$
(Intercept)	3,0722656	0,06167052	49,8174098	$0{,}000000 \times 10^{+000}$
St Yorre	-0,1660156	0,16316486	-1,017472	$3{,}095697 \times 10^{-001}$
Badoit	-0,1816406	0,16316486	-1,113234	$2{,}663044 \times 10^{-001}$
Vichy	-0,2441406	0,16316486	-1,496282	$1{,}354016 \times 10^{-001}$
Quézac	0,4277344	0,16316486	2,621486	$9{,}102684 \times 10^{-003}$
Arvie	-0,2128906	0,16316486	-1,304758	$1{,}927567 \times 10^{-001}$
Chateauneuf	0,2714844	0,16316486	1,663865	$9{,}695512 \times 10^{-002}$
Salvetat	0,3496094	0,16316486	2,142676	$3{,}276727 \times 10^{-001}$
Perrier	-0,2441406	0,16316486	-1,496282	$1{,}354016 \times 10^{-001}$

....

Éléments de corrigé : Comparaison de l'appréciation de huit eaux gazeuses

1. Il y a $8 \times 16 \times 4 = 512$ observations. Pour chaque observation, nous disposons du nom du juge qui l'a effectuée (variable qualitative), de l'eau concernée (variable qualitative) et de la note mise (variable quantitative).
2. Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \ldots 8,\ j = 1 \ldots 16,\ k = 1 \ldots 4,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{16} \beta_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{8} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, 16\} \text{ et } \sum_{j=1}^{16} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, 8\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la note du juge i lors de l'évaluation de l'eau j au cours du $k-$ème essai. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant 8,\ 1 \leqslant j \leqslant 16,\ 1 \leqslant k \leqslant 4,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leqslant i, l \leqslant 8,\ 1 \leqslant j, m \leqslant 16 \text{ et } 1 \leqslant k, n \leqslant 4.$$

Ce modèle comporte quatre répétitions pour chacun des niveaux du facteur. Il s'agit d'un plan expérimental équilibré.

Pour tester la significativité de l'interaction, nous construisons le test suivant :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{1,J} = (\alpha\beta)_{2,1} = \cdots = (\alpha\beta)_{I,J} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{1, 2, \ldots, I\} \times \{1, 2, \ldots, J\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

La statistique de test est :

$$F = \frac{CM_{\text{interaction}}}{CM_{\text{résiduelle}}}.$$

Ici : $ddl_{\text{interaction}} = (I-1)(J-1) = (8-1)(16-1) = 105$ et $ddl_{\text{résiduelle}} = n - IJ = 512 - 128 = 384$. Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et les hypothèses du modèle, F suit une loi de Fisher à 105 et 384 degrés de liberté. Décision : la $p-$valeur vaut $1,192 \times 10^{10}$, le test est donc significatif au seuil $\alpha = 5$ %. Nous considérons donc que l'interaction entre le facteur *juge* et le facteur *eau* est significative, c'est-à-dire que tous les juges n'ont pas les mêmes préférences.

3. Les tests sur les effets principaux *eau* et *juge* se construisent de la même façon que le test de l'interaction. Les effets *eau* et *juge* sont donc significatifs : certaines eaux sont globalement plus appréciées que d'autres ; certains juges mettent en moyenne des notes plus élevées que d'autres.

4. L'eau la plus appréciée est l'eau Quézac puisque cette eau a le coefficient $\widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y})$ le plus élevé (0,428). Mais comme l'interaction *juge* × *eau* est significative, tous les juges ne préfèrent pas forcément l'eau Quézac. A priori, lors d'un rassemblement, il sera bon de prévoir d'autres eaux minérales.

....

Rats et régimes [5]

Nous testons l'influence de différents régimes alimentaires sur des rats de laboratoire.

Le gain de poids des rats est désigné par la variable *Poids*, exprimée en grammes, les deux facteurs sont les variables $Calorie$ et $Vitamine$. La variable $Calorie$ vaut 1 si les rats n'ont pas suivi un régime hypercalorique et 2 s'ils ont suivi un tel régime hypercalorique. La variable $Vitamine$ vaut 1 si les rats n'ont pas reçu de compléments vitaminés et 2 s'ils ont reçu de tels compléments.

---

[5] Les données, fictives, de cet exercice sont tirées du livre de Bruno Falissard [Fal05].

Calorie	Vitamine	Poids	Calorie	Vitamine	Poids
1	1	84	1	1	66
1	2	62	1	2	59
2	1	87	2	1	89
2	2	103	2	2	90
1	1	66	1	1	56
1	2	84	1	2	74
2	1	92	2	1	101
2	2	107	2	2	116
1	1	82	1	1	79
1	2	73	1	2	74
2	1	77	2	1	95
2	2	95	2	2	112
1	1	62	1	1	89
1	2	75	1	2	74
2	1	88	2	1	91
2	2	96	2	2	92

1. Quels modèles d'analyse de la variance à deux facteurs pouvez-vous utiliser pour étudier ces données ? Nous décidons de retenir, pour répondre aux questions suivantes, le modèle le plus complet parmi ceux dont il est possible de se servir. Rappeler les hypothèses associées au modèle.
2. Procéder à l'étude à l'aide de Minitab©.
3. Quelles sont les estimations des paramètres du modèle ?
4. Devons-nous réaliser des tests de comparaisons multiples ? Si oui, pour quel facteur ? Le(s) faire.

....

Éléments de corrigé : Rats et régimes

1. La réponse observée, le gain de *Poids* exprimé en grammes, est considérée comme une variable quantitative. Le premier des deux facteurs, absence ou présence de compléments vitaminés, noté *Vitamine*, est qualitatif. Le second des deux facteurs, le type de régime suivi, hypocalorique ou non, noté *Calorie*, est également qualitatif. Le plan d'expérience comporte huit répétitions : nous pouvons de ce fait utiliser deux modèles d'analyse de la variance à deux facteurs, l'un ne comportant pas d'interaction entre les deux facteurs *Vitamine* et *Calorie*, l'autre comportant cette interaction. Le modèle le plus complet parmi ces deux possibilités est celui de l'analyse de la variance avec répétitions et terme d'interaction. Nous décidons de le

retenir pour la suite de l'étude.
Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1,2,\ j = 1,2,\ k = 1\dots 8,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1,2\} \text{ et } \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1,2\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est le gain de poids dans la condition i du facteur *Vitamine* et dans la condition j du facteur *Calorie* lors de la $k-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant 8,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leqslant i,l \leqslant 2,\ 1 \leqslant j,m \leqslant 2 \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant 8.$$

2. Nous commençons par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question 1. sont bien vérifiées. Pour cela, nous calculons les résidus du modèle.

   1. Le protocole expérimental indique que l'expérience a bien porté sur 32 rats différents et que nous ne sommes pas en présence de mesures qui seraient répétées sur un ou des mêmes individus. Ceci nous permet de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j,k}$ sont indépendantes.
   2. Le plan d'expérience utilisé comporte des répétitions ce qui permet de tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ d'égalité des variances des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$:

      $$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1,1} = \sigma^2_{2,1,1} = \sigma^2_{1,2,1} = \sigma^2_{2,2,1} = \cdots = \sigma^2_{1,1,8} = \sigma^2_{2,1,8} = \sigma^2_{1,2,8} = \sigma^2_{2,2,8}}$$

      contre

      $$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

      Puisque nous ne connaissons pas la loi des erreurs, nous utilisons un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

      ```
      Test de l'égalité des variances
      Facteurs    Calorie  Vitamine

      Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

      Statistique du test : 2,347
      P :                   0,094
      ```

      Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et nous ne pouvons rejeter l'hypothèses nulle $\mathcal{H}_0$ d'homoscédasticité.
   3. Nous nous intéressons désormais à la normalité des erreurs. Nous cherchons à savoir si nous pouvons faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

Nous utilisons alors le test de Ryan-Joiner :

```
W-test pour la normalité
R:                             0,9906
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil α du test. Nous en déduisons que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5$ % et que nous ne pouvons donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5$ %.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejétée à la question 3., nous nous intéressons à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.
   Le plan d'expérience utilisé comporte des répétitions ce qui permet de tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ d'égalité des variances des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$:

   $$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1,1} = \sigma^2_{2,1,1} = \sigma^2_{1,2,1} = \sigma^2_{2,2,1} = \cdots = \sigma^2_{1,1,8} = \sigma^2_{2,1,8} = \sigma^2_{1,2,8} = \sigma^2_{2,2,8}}$$

   contre

   $$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

   Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

   ```
   Test de l'égalité des variances
   Facteurs    Calorie  Vitamine

   Test de Bartlett (loi normale)

   Statistique du test : 2,233
   P :                   0,525
   ```

   Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et nous ne pouvons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'homoscédasticité.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés avec répétitions et terme d'interaction sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Calorie*, le facteur *Vitamine* ou l'interaction des deux facteurs a un effet sur le gain de *Poids*. Nous testons donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = (\alpha\beta)_{2,1} = (\alpha\beta)_{2,2} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \text{ tel que } (\alpha\beta)_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

Nous consultons alors le tableau de l'analyse de la variance

```
Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Vitamine     fixe       2  1 2
Calorie      fixe       2  1 2

Analyse de la variance pour Poids, en utilisant la SC ajustée pour
les tests

Source       DL     SC séq   SC ajust   CM ajust        F      P
Vitamine      1      215,3      215,3      215,3     2,51  0,124
Calorie       1     4347,8     4347,8     4347,8    50,69  0,000
Vitamine
*Calorie      1      306,3      306,3      306,3     3,57  0,069
Erreur       28     2401,6     2401,6       85,8
Total        31     7271,0
```

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est de $0,124$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5$ % : le test n'est pas significatif à ce seuil. Nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ d'absence d'effet du facteur *Vitamine* sur le gain de *Poids*. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Vitamine* n'a pas un effet significatif sur le gain de *Poids*. En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de seconde espèce, il serait très intéressant de calculer la puissance a posteriori.

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est de $0,000$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. Nous devons rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ d'absence d'effet du facteur *Calorie* sur le *Poids* et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1^{''}$ d'existence d'un effet du facteur *Calorie* sur le *Poids*. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Calorie* a un effet significatif sur le *Poids*. En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ est de $0,069$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5$ % : le test n'est pas significatif à ce seuil. Nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ d'absence d'effet de l'interaction des facteurs *Vitamine* et *Calorie* sur le gain de *Poids*. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, l'interaction des facteurs *Vitamine* et *Calorie* n'a pas un effet significatif sur le gain de *Poids*. En prenant cette décision, nous risquons de commettre une erreur de seconde espèce, il serait très intéressant de calculer la puissance a posteriori.

Il est possible de calculer les puissances recherchées avec Minitab©. Nous utilisons le fait que le dispositif étudié est ce que nous appelons aussi un plan factoriel complet à deux niveaux puisqu'il s'agit d'un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs avec le terme d'interaction et surtout que le plan d'expérience est équilibré. À l'aide de l'entrée **Plan factoriel à 2 niveaux** du sous menu **Puissance et effectif de l'échantillon** du menu **Stat** de Minitab©, nous obtenons le résultat suivant :

```
Puissance et effectif de l'échantillon

Plan factoriel à 2 niveaux

Sigma = 9,26121  Alpha = 0,05

Facteurs :        2   Plan de base :          2; 4
Blocs :       aucun

  Points
centraux
par bloc    Effet    Répétitions  Puissance
       0    5,187              8     0,3338
       0    6,188              8     0,4464
```

La valeur de l'*Effet* correspond à l'écart le plus important en valeur absolue entre les estimations des différents niveaux du facteur. Ainsi pour le facteur $Vitamine$ l'*Effet* vaut $\widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = 2,594 - (-2,594) = 5,187$, il n'y avait en fait qu'une possibilité. Pour l'interaction entre les deux facteurs $Vitamine$ et $Calorie$, l'*Effet* vaut : $\widehat{(\alpha\beta)}_{1,1}(\boldsymbol{y}) - \widehat{(\alpha\beta)}_{1,2}(\boldsymbol{y}) = \widehat{(\alpha\beta)}_{2,2}(\boldsymbol{y}) - \widehat{(\alpha\beta)}_{2,1}(\boldsymbol{y}) = 3,094 - (-3,094) = 6,188$. Il y a deux facteurs, quatre sommets dans ce plan et aucun point central. La puissance a posteriori est donc relativement faible, 0,3338, dans le cas du facteur $Calorie$ et à peine meilleure, 0,4464, dans le cas de l'interaction entre les deux facteurs $Vitamine$ et $Calorie$. Nous aurions pu améliorer la puissance du test en augmentant le nombre de répétitions. Nous déterminons le nombre de répétitions nécessaires pour que nous ayons une puissance de 0,80, qui est généralement considéré comme un niveau satisfaisant pour la puissance d'un test.

```
Puissance et effectif de l'échantillon

Plan factoriel à 2 niveaux

Sigma = 9,26121  Alpha = 0,05

Facteurs :        2   Plan de base :          2; 4
Blocs :       aucun
```

```
  Points
centraux                          Puissance  Puissance
par bloc    Effet    Répétitions      cible     réelle
       0    5,187             26     0,8000     0,8074
       0    6,188             19     0,8000     0,8195
```

Nous constatons qu'il aurait fallu 26 répétitions, donc 104 rats, pour obtenir une puissance d'au moins 0,80. Nous aurions multiplié par plus de trois l'ampleur de l'étude qui a été réalisée...

3. Les estimations des coefficients du modèle sont :

```
Terme                  Coef      Er-T coef        T      P
Constante            84,031          1,637    51,33  0,000
Vitamine
1                    -2,594          1,637    -1,58  0,124
Calorie
1                   -11,656          1,637    -7,12  0,000
Vitamine*Calorie
1        1            3,094          1,637     1,89  0,069
```

Nous en déduisons que :

$$\begin{array}{rrr} \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = 84,031, & \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = -2,594, & \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) = 2,594, \\ & \widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y}) = -11,656, & \widehat{\beta_2}(\boldsymbol{y}) = 11,656, \\ & \widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y}) = 3,094, & \widehat{(\alpha\beta)_{1,2}}(\boldsymbol{y}) = -3,094, \\ & \widehat{(\alpha\beta)_{2,1}}(\boldsymbol{y}) = -3,094, & \widehat{(\alpha\beta)_{2,2}}(\boldsymbol{y}) = 3,094, \end{array}$$

en utilisant les relations $\sum_{i=1}^{2} \widehat{\alpha_i} = 0$, $\sum_{j=1}^{2} \widehat{\beta_j} = 0$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}} + \widehat{(\alpha\beta)_{1,2}} = 0$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}} + \widehat{(\alpha\beta)_{2,1}} = 0$ et $\widehat{(\alpha\beta)_{2,1}} + \widehat{(\alpha\beta)_{2,2}} = 0$ qui sont en particulier valables pour les données expérimentales $\boldsymbol{y}$: $\sum_{i=1}^{2} \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = 0$, $\sum_{j=1}^{2} \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = 0$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y}) + \widehat{(\alpha\beta)_{1,2}}(\boldsymbol{y}) = 0$, $\widehat{(\alpha\beta)_{1,1}}(\boldsymbol{y}) + \widehat{(\alpha\beta)_{2,1}}(\boldsymbol{y}) = 0$ et $\widehat{(\alpha\beta)_{2,1}}(\boldsymbol{y}) + \widehat{(\alpha\beta)_{2,2}}(\boldsymbol{y}) = 0$

Remarquons que nous n'avons pas eu à utiliser la relation $\widehat{(\alpha\beta)_{1,2}} + \widehat{(\alpha\beta)_{2,2}} = 0$ ce qui était prévisible car, d'après le cours, nous savons que nous imposons seulement $I + J - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$ relations **indépendantes** aux coefficients $(\alpha\beta)_{i,j}$. Nous devons donc retrouver toutes les estimations $\widehat{(\alpha\beta)_{i,j}}(\boldsymbol{y})$ à l'aide des valeurs fournies par le logiciel et de seulement $I + J - 1 = 3$ des relations portant sur ces estimations.

À l'aide de l'entrée **Graphique des effets principaux** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab©, nous obtenons la représentation graphique des estimations des $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y})$, $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\beta_1}(\boldsymbol{y})$ et $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\beta_2}(\boldsymbol{y})$. Nous comprenons ainsi visuellement pourquoi le facteur facteur *Calorie* a un effet significatif sur le gain de *Poids* au seuil $\alpha = 5$ %. L'influence du facteur $Vitamine$ n'est, quant à elle, pas significative au seuil $\alpha = 5$ % ce qui est bien confirmé par le graphique ci-dessous.

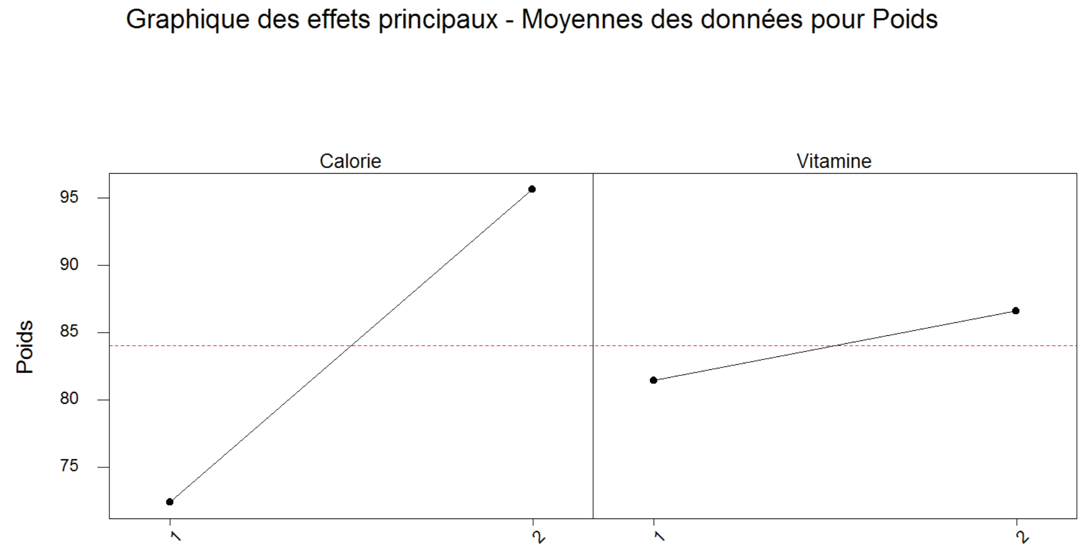


Figure 11.6 – **Graphique : Effets principaux**.

À l'aide de l'entrée **Diagramme des interactions** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab©, nous obtenons la représentation graphique de l'effet des interactions. Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$ d'absence d'interaction entre les deux facteurs *Vitamine* et *Calorie*, dans chacune des deux cases, inférieure gauche et supérieure droite, du graphique, les deux segments représentés en noir et rouge[6] sont parallèles. La force d'une interaction est associée au défaut de parallélisme de ces deux segments. Nous constatons visuellement que dans les deux cases du graphique les deux segments ne sont pas parallèles mais ces interactions entre les deux facteurs ne sont pas assez importantes pour qu'elles soient significatives au seuil $\alpha = 5$ %. Par contre ces interactions auraient été significatives au seuil $\alpha = 10$ % puisque nous avons une $p-$valeur de $0,069$ associée au test de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$.

4. Puisque nous avons rejeté l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0''$ d'absence d'effet du facteur *Calorie* sur le gain de *Poids*, nous pouvons réaliser des comparaisons multiples pour le facteur *Calorie*. Or ce facteur n'a que deux modalités ! Il n'est donc pas nécessaire de faire des investigations supplémentaires pour en déduire que ce sont les deux seuls niveaux du facteur *Calorie*, 1 et 2, qui sont significativement différents au seuil $\alpha = 5\%$.

---

[6] En gris si vous lisez une version imprimée du corrigé de cet exercice.

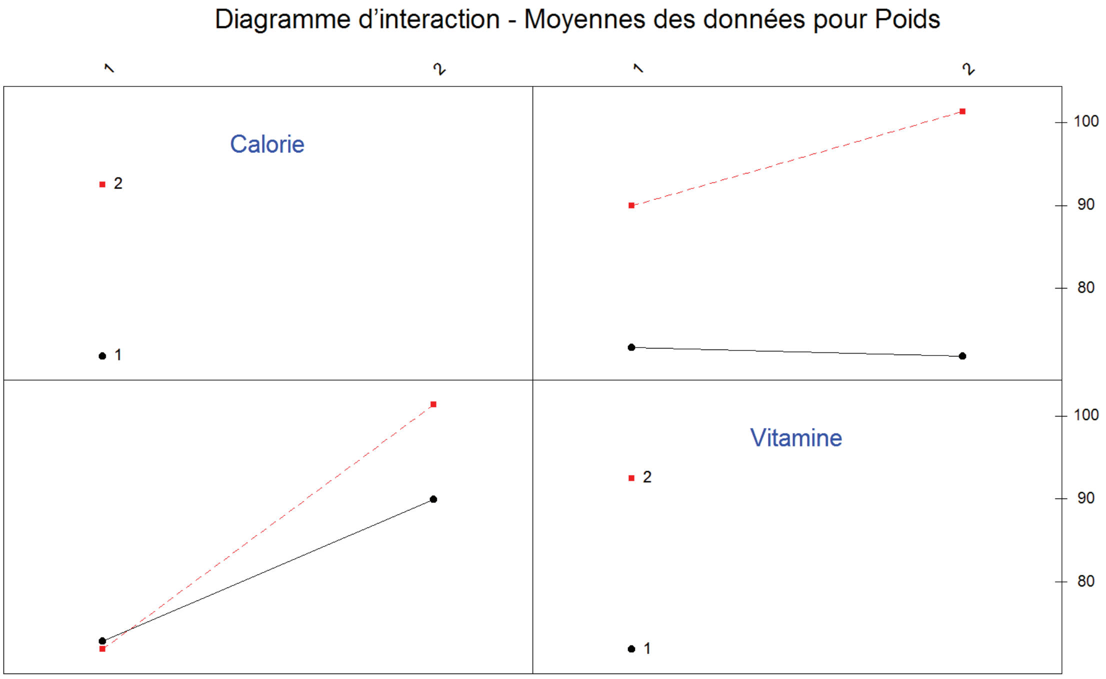


Figure 11.7 – **Graphique : Diagramme d'interaction.**

. . . .

Les préférences de biscuits sont-elles les mêmes d'un pays à l'autre ? [7]

Une analyse sensorielle a été organisée simultanément en France et au Pakistan. Nous avons demandé à 150 français et à 163 pakistanais de donner une note d'appréciation à 8 biscuits (0 : je n'aime pas, 10 : j'aime beaucoup). Parmi ces biscuits, 4 sont fabriqués et vendus en France (biscuits notés F1, F2, F3 et F4) et 4 sont fabriqués et vendus au Pakistan (biscuits notés P1, P2, P3, et P4). L'objectif d'une telle analyse est de comparer les appréciations d'un pays à l'autre.
Un résumé des données est fourni dans le tableau ci-dessous.

	Origine française				Origine pakistanaise			
	F1	F2	F3	F4	P1	P2	P3	P4
Jury français	7,35	6,06	5,08	5,75	4,99	6,03	4,22	5,18
Jury pakistanais	6.29	5.10	5.23	5.38	7.49	6.74	5.56	6.32

1. Proposer un modèle d'analyse de la variance sur les données du tableau précédent permettant de répondre à la question : dans l'ensemble, les biscuits d'origine française et pakistanaise sont-ils évalués de la même manière par les deux jurys (le

---

[7] Les données de cet exercice sont tirées du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès [HPer].

premier constitué de juges exclusivement de nationalité française et le second constitué exclusivement de juges de nationalité pakistanaise) ? Interpréter la variabilité résiduelle de ce modèle.

2. Le listage suivant donne les résultats du modèle d'analyse de la variance sur les seules données du tableau précédent. Que pouvez-vous dire ?

	ddl	SCE	CM	f_{obs}	$Proba$
Nationalité jury	1	0,7439	0,7439	1,2398	0,28732
Origine biscuit	1	0,0053	0,0053	0,0088	0,92698
Nationalité jury : Origine biscuit	1	3,9303	3,9303	0,02503	0,02503
Résiduelle	12	7,2004	0,6000		

Nous analysons maintenant l'ensemble des données individuelles. Le tableau suivant donne les probabilités critiques de chacun des effets et de chacune des interactions calculées sur ces données brutes.

3. Pourquoi peut-il être plus intéressant de travailler sur les données brutes ? Que pouvez-vous dire à partir du tableau d'analyse de la variance ci-dessous ? Interpréter.

	ddl	SCE	CM	f_{obs}	$Proba$
Nationalité jury	1	1,5	1,5	0,245	0,621
Origine biscuit	1	0,06	0,06	0,0098	0,9212
Nationalité jury : Origine biscuit	1	410,17	410,17	66,91	$5,126 \times 10^{-16}$
Résiduelle	1907	11689,94	6,130		

4. Construire un graphique avec en abscisse les biscuits et en ordonnée les notes moyennes par jury. Relier les points d'un même jury. Que représente ce graphique ?
5. Quelle critique pouvez-vous formuler concernant ce modèle ?

. . . .

Éléments de corrigé : Les préférences de biscuits sont-elles les mêmes d'un pays à l'autre ?

1. Dire que les biscuits ne sont pas évalués de la même manière par les deux jurys revient à mettre en évidence une interaction entre les facteurs *biscuit* et *jury*. Si nous considérons l'ensemble des biscuits, le tableau ne fait pas apparaître de répétitions et il est impossible de mettre en évidence une interaction. En revanche, si nous regroupons les biscuits par origine, alors nous pouvons construire un modèle d'analyse de variance à deux facteurs avec interaction. La variable Y sera l'appréciation et les facteurs seront la nationalité du jury (française ou pakistanaise) et l'origine des

biscuits (française ou pakistanaise) ainsi que l'interaction de ces deux facteurs. Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1,2,\ j = 1,2,\ k = 1\ldots 4,$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1,2\} \text{ et } \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1,2\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la moyenne des appréciations du $k-$ème biscuit d'origine i évalué par l'ensemble des juges de nationalité j. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant 4,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leqslant i,l \leqslant 2,\ 1 \leqslant j,m \leqslant 2 \text{ et } 1 \leqslant k,n \leqslant 4.$$

La variabilité résiduelle est alors celle des biscuits d'une même origine évalués par un même jury (ceci est dû à notre regroupement).

2. Nous nous intéressons à la validité des hypothèses du modèle.

Le test de l'homoscédasticité des résidus à l'aide d'un test de Levene n'est pas significatif :

```
Test de l'égalité des variances

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,296
P :                   0,827
```

Le test de normalité à l'aide d'un test de Shapiro-Wilk (car $N = 45$) n'est pas significatif :

```
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
R:                             0,9719
W-test pour la normalité
```

Nous allons donc faire également un test de Bartlett (plus puissant que Levene à cause de la normalité) :

```
Test de l'égalité des variances

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 0,296
P :                   0,843
```

Ce test n'est pas significatif ce qui confirme bien l'homoscédasticité des résidus.

Nous obtenons les résultats suivants, qui sont bien identiques à ceux qui figurent dans le tableau de l'énoncé.

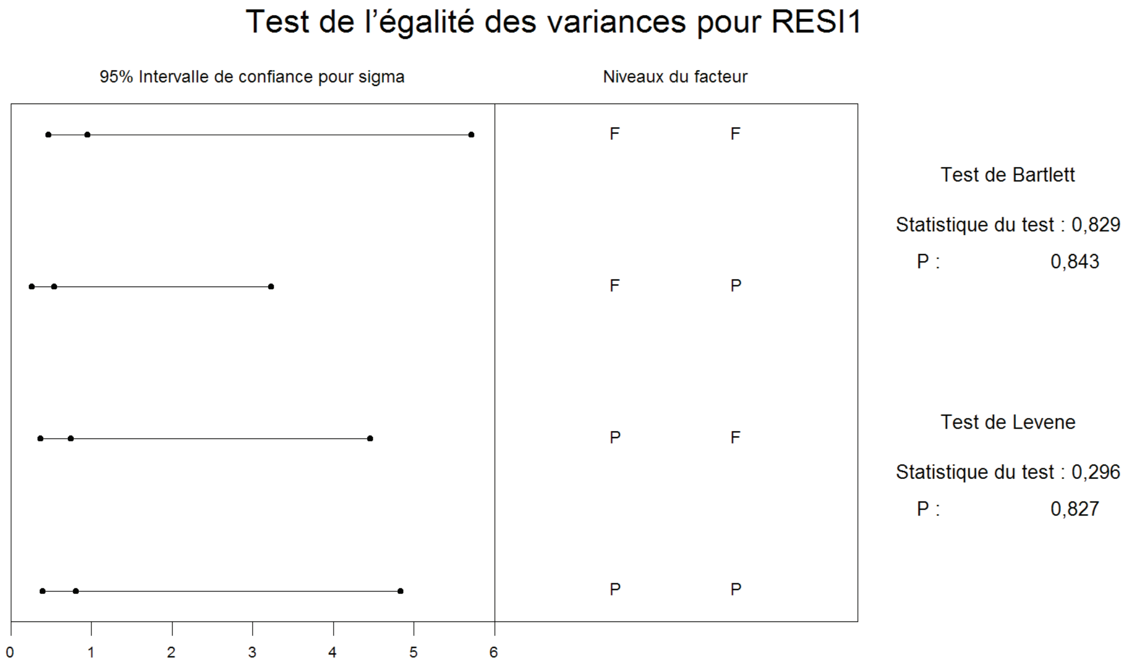


Figure 11.8 – **Graphique : Test de l'égalité des variances**.

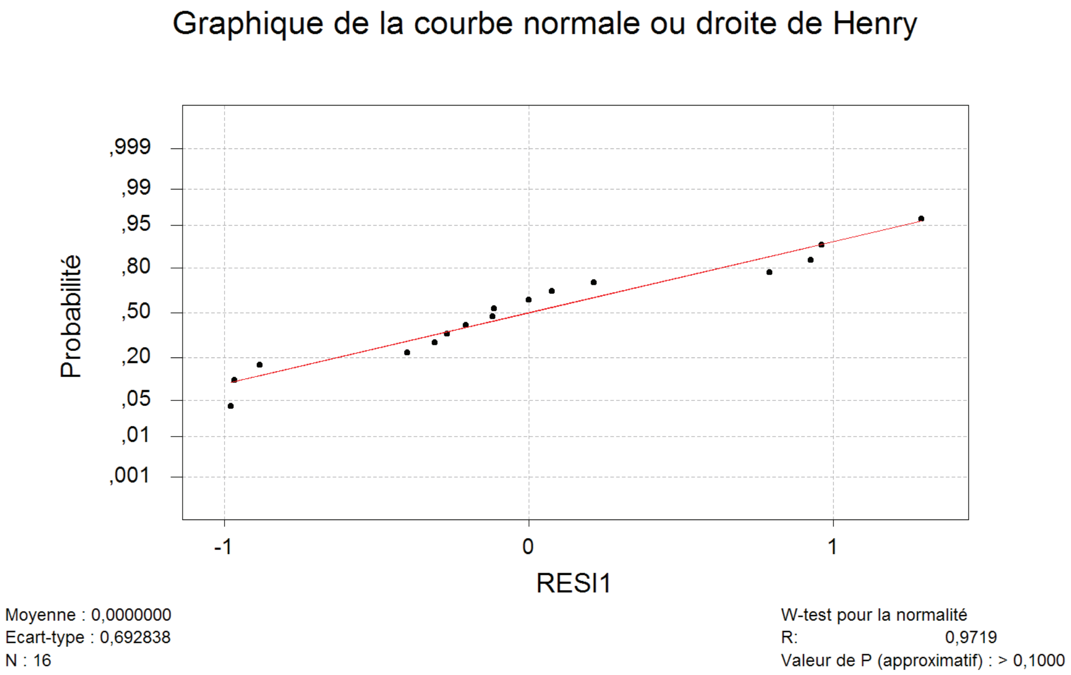


Figure 11.9 – **Graphique : Test de normalité**.

```
Modèle linéaire généralisé : Note en fonction de Origine; Jury


Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Origine      fixe       2  F P
```

```
Jury         fixe       2  F P

Analyse de la variance pour Note, en utilisant la SC ajustée pour
les tests

Source         DL     SC séq   SC ajust   CM ajust        F      P
Origine         1     0,0053     0,0053     0,0053     0,01  0,927
Jury            1     0,7439     0,7439     0,7439     1,24  0,287
Origine*Jury    1     3,9303     3,9303     3,9303     6,55  0,025
Erreur         12     7,2004     7,2004     0,6000
Total          15    11,8798

Terme              Coef      Er-T coef        T      P
Constante        5,7981         0,1937    29,94  0,000
Origine
F               -0,0181         0,1937    -0,09  0,927
Jury
F               -0,2156         0,1937    -1,11  0,287
Origine*Jury
F       F        0,4956         0,1937     2,56  0,025
```

Au seuil $\alpha = 5$ %, il y a un effet de l'interaction *nationalité du jury* × *origine des biscuits* mais il n'y a pas d'effet de la nationalité du jury ni d'effet de l'origine des biscuits. Cela signifie qu'aucun des jurys ne met en moyenne des notes plus élevées (pas d'effet jury), et que les biscuits français sont en moyenne autant appréciés que les biscuits pakistanais (pas d'effet origine) mais il existe une interaction. Donc les français n'évaluent pas les biscuits comme les pakistanais.

3. Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k,l},$$
$$i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ k = 1 \dots 4,\ l = 1 \dots L(i, j, k),$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{4} \gamma_k = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, 2\} \text{ et } \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, 2\},$$

où $Y_{i,j,k,l}$ l'appréciation du $l-$ème juge de nationalité j évaluant le $k-$ème biscuit d'origine i. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i, j, k, l), 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant 4,\ 1 \leqslant l \leqslant L(i, j, k),$$
$$\mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i, j, k, l) \neq (m, n, o, p)$$
$$\text{avec } 1 \leqslant i, m \leqslant 2,\ 1 \leqslant j, n \leqslant 2,\ 1 \leqslant k, o \leqslant 4,\ 1 \leqslant l \leqslant L(i, j, k)$$
$$\text{et } 1 \leqslant p \leqslant L(m, n, o).$$

Si nous travaillons sur les données brutes, nous pouvons donc construire le modèle ci-dessus et la variablité résiduelle change donc de signification par rapport à la

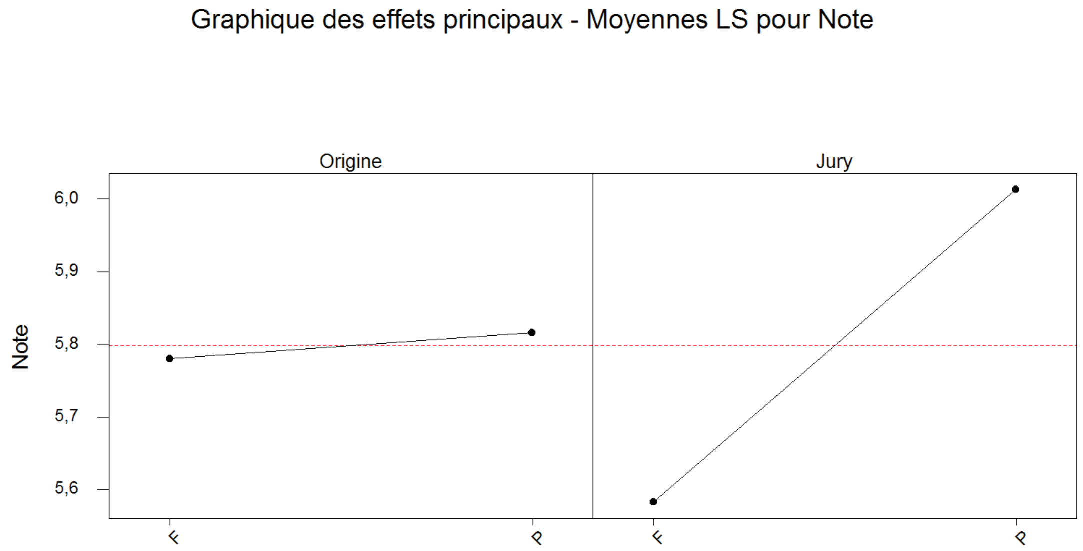


Figure 11.10 – **Graphique : Effets principaux**.

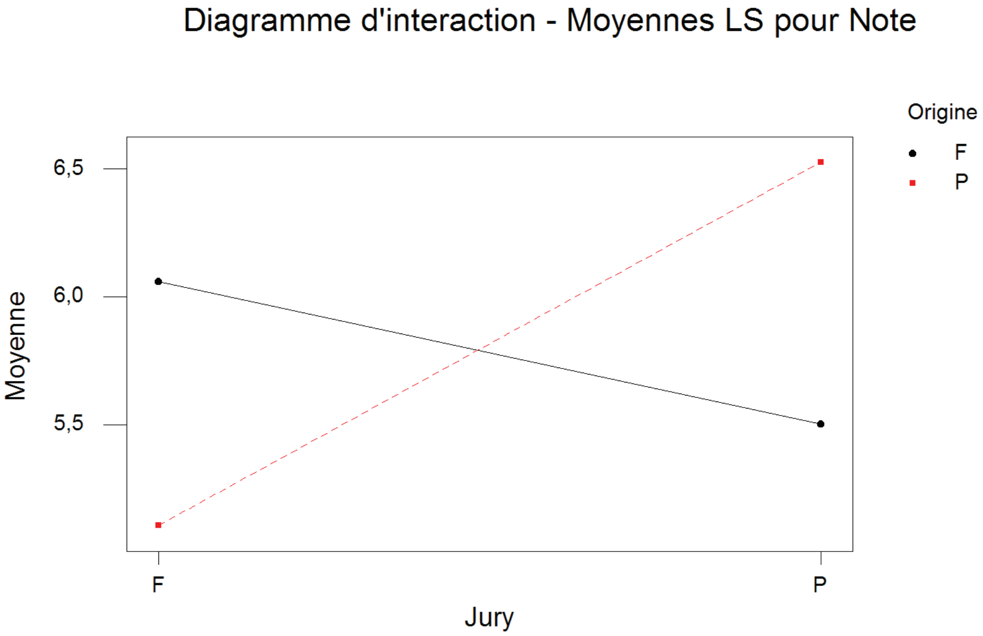


Figure 11.11 – **Graphique : Diagramme d'interaction**.

question 1. En effet deux indices n'interviennent qu'à travers la résiduelle : à la variabilité des biscuits d'une même origine s'ajoute la variabilité des juges d'un même jury. Mais parallèlement il y a beaucoup plus de données et donc les tests sont plus puissants. Cependant malgré des tests plus puissants nous ne mettons toujours pas en évidence l'effet de l'origine du biscuit ni l'effet de la nationalité du jury. L'interaction entre ces deux facteurs est par contre beaucoup mieux mise en évidence puisque la $p-$valeur associée est maintenant de $5,126 \times 10^{-16}$ (contre 0,025 précedemment).

4. Le graphique demandé représente l'interaction *origine du biscuit* × *jury*. S'il n'y avait pas d'interaction, les lignes brisées seraient parallèles. Nous pouvons voir ici que les pakistanais apprécient surtout les biscuits pakistanais (biscuits P1, P2, P3 et P4) tandis que les français préfèrent les biscuits français (biscuits F1 à F4). Peut-être y a-t-il une sorte de rejet devant un produit nouveau ou une sur-notation pour des produits nationaux qui sont reconnus et appréciés ?
5. Nous ne tenons pas compte du facteur type de biscuit qui est emboîté dans le facteur *Origine* du biscuit.

…………

11.2.3. Avec répétitions et plan déséquilibré

Analyse sensorielle de trois chocolats [8]

Lors d'un test de dégustation hédonique, nous nous intéressons à l'appréciation globale de trois chocolats. Pour cela, 45 juges ont participé à cette évaluation qui a eu lieu sur 2 jours (nous disposons de 15 échantillons par chocolat). Les notes d'appréciation des juges, comprises en 0 et 7, sont données dans le tableau ci-dessous. Chaque juge n'a évalué qu'un chocolat. Comme chacun choisit son jour de dégustation et le chocolat qu'il évalue, le nombre de données et la répartition des chocolats évalués ne sont pas les mêmes d'un jour à l'autre.
Nous souhaitons d'une part vérifier qu'il y a bien un effet *chocolat*, s'il y a un effet *jour* (les chocolats pouvant être plus ou moins appréciés lors du premier ou du deuxième jour) et un effet de l'interaction entre *chocolat* et *jour*.

	Chocolat 1			Chocolat 2			Chocolat 3		
Jour 1	5.2	6	5.4	4.2	5.2	5	4.6	5.6	5.2
	5.2	6.6		4.4	5.4	4.8	4.8	5.8	6.4
				4.4	5.6	6	5	6.2	5.2
							5.4	6.4	
Jour 2	3.2	4	3.6	3.2	3.6	4.2	3	3.8	3.4
	4.2	3.8	3.4	4	3.6	4	4.4		
	4	4.4	4.6						
		4							

1. Écrire le modèle permettant de répondre à la problématique. Que signifie l'interaction entre les facteurs *chocolat* et *jour* ?

---

[8] Les données de cet exercice sont tirées du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès [HPer].

2. Comment (par quelle formule) sont estimés les paramètres de ce modèle ?
3. Il y a-t-il un effet *jour*, un effet *chocolat* et un effet de l'interaction ?
4. Par chocolat, calculer la moyenne des notes et la comparer avec la moyenne ajustée ($\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y})$). Qu'en pensez-vous ? Quel est le chocolat préféré ?
5. Tester l'hypothèse « $\mathcal{H}_0$: l'effet du chocolat 1 est nul » (préciser les hypothèses du test, la statistique de test, la loi de la statistique de test sous $\mathcal{H}_0$, et la décision).

. . . .

Éléments de corrigé : Analyse sensorielle de trois chocolats

1. Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1 \dots 3,\ j = 1, 2,\ k = 1 \dots K(i,j),$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1,2\} \text{ et } \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1,\dots,3\},$$

où $Y_{i,j,k}$ est la $k-$ème note obtenue le jour j par le chocolat i. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant K(i,j),\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leqslant i, l \leqslant 3,\ 1 \leqslant j, m \leqslant 2 \text{ et } 1 \leqslant k, n \leqslant K(i,j).$$

Une interaction *Jour* × *Chocolat* signifie qu'un même chocolat n'est pas apprécié de la même façon les 2 jours.

2. Le vecteur des paramètres peut être estimé par moindres carrés.
3. Nous procédons à l'ANOVA (en stockant les résidus afin de pouvoir vérifier s'ils vérifient les hypothèses) à l'aide de la fonction modèle linéaire généralisé et nous obtenons les résultats suivant :

```
Modèle linéaire généralisé : note en fonction de jour; chocolat

Facteur      Type Niveaux  Valeurs
jour         fixe       2  1 2
chocolat     fixe       3  1 2 3

Analyse de la variance pour note

Source          DL     SC séq   SC ajust   CM ajust      F      P
jour             1    26,3511    25,6301    25,6301  84,45  0,000
chocolat         2     1,3894     1,2021     0,6010   1,98  0,152
jour*chocolat    2     0,7662     0,7662     0,3831   1,26  0,294
Erreur          39    11,8364    11,8364     0,3035
Total           44    40,3431
```

Le test de l'homoscédasticité des résidus à l'aide d'un test de Levene n'est pas significatif :

```
Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,613
P :                   0,691
```

Le test de normalité à l'aide d'un test de Ryan6Joiner, similaire à Shapiro-Wilk, (car N=45) n'est pas significatif :

```
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
R:                             0,9885
W-test pour la normalité
```

Nous allons donc faire également un test de Bartlett (plus puissant que le test de Levene à cause de la normalité) :

```
Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 2,643
P :                   0,755
```

Ce test n'est pas significatif ce qui confirme bien l'homoscédasticité des résidus. L'étude du protocole expérimental nous assure de l'indépendance des variables $\epsilon_{i,j,k}$. Puisque les conditions d'application de l'ANOVA sont bien respectées, nous pouvons déduire des résultats reportés dans le tableau ci-dessus qu'en considérant le modèle introduit à la première question il n'y a, au seuil $\alpha = 5$ %, ni effet *chocolat* $(0,152 > 0,05)$ ni effet de l'interaction $(0,294 > 0,05)$.

4. La moyenne des notes est de $4,676$. Les moyennes par chocolat sont :

```
Variable   chocolat          N    Moyenne    EcarType
note       1                15      4,507       0,982
           2                15      4,507       0,807
           3                15      5,013       1,041
```

Pour obtenir les moyennes ajustées $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}), \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}), \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y})$ nous faisons appel à la technique apprise dans le cours, basée sur la régression linéaire multiple, afin d'estimer les coefficients $\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}), \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}), \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}), \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y})$. Cette estimation des paramètres est encore obtenue à l'aide du modèle linéaire généralisé (pensez à afficher les résultats les plus détaillés). Les calculs renvoient les résultats ci-dessous :

```
Terme                Coef       Er-T coef        T       P
Constante         4,58763         0,08801    52,13   0,000
jour
1                 0,80874         0,08801     9,19   0,000
chocolat
1                  0,2124          0,1238     1,72   0,094
2                 -0,2043          0,1215    -1,68   0,101
jour*chocolat
1    1             0,0713          0,1238     0,58   0,568
1    2            -0,1921          0,1215    -1,58   0,122
```

Nous en déduisons que :

$$\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) = 4,588, \quad \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = 0,212, \quad \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) = -0,204, \quad \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y}) = -0,008$$

et que les moyennes ajustées valent :

$$\widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_1}(\boldsymbol{y}) = 4,800, \quad \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_2}(\boldsymbol{y}) = 4,384, \quad \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_3}(\boldsymbol{y}) = 4,580.$$

Par conséquent c'est le chocolat 1 qui est le préféré. Le déséquilibre des données fait que la moyenne d'un chocolat n'est plus égale à sa moyenne ajustée. Ainsi contrairement à ce que la moyenne des notes semblaient indiquer ce n'est pas le chocolat 3 qui est le préféré.

5. $\mathcal{H}_0 \;:\; \alpha_1 = 0$ contre $\mathcal{H}_1 \;:\; \alpha_1 \neq 0$. La statistique du test est $\dfrac{\widehat{\alpha_1}}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\alpha_1}}}$ et suit, sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, une loi de Student avec autant de degrés de liberté que ceux de la variance résiduelle (i.e. 39). La probabilité critique associée à cette valeur est de $0,094$, ce chocolat n'est donc pas significativement plus apprécié que les autres.

....

11.3. Analyse de la variance à deux facteurs emboîtés

11.3.1. Plan déséquilibré

Les cyclamens [9]

Les résultats suivants sont relatifs à la vitesse moyenne de croissance, en *mm* par jour, des pédoncules floraux observés sur huit plantes de cyclamen, réparties au hasard entre deux milieux de culture.

Milieu 1				Milieu 2			
Plante 1	Plante 2	Plante 3	Plante 4	Plante 5	Plante 6	Plante 7	Plante 8
0,76	0,97	0,58	0,86	0,81	1,07	0,62	0,93
0,66	0,74	0,57	0,93	0,77	0,82	0,99	1,07
0,61		0,51			1,02		0,95
0,65		0,62					0,79
							0,66

1. De quel modèle d'analyse de la variance pouvons-nous nous servir pour étudier ces données ?
2. Pouvons-nous conclure sur cette base à l'existence d'une différence significative de vitesse de croissance entre les deux milieux ?

---

[9] Les données de cet exercice sont tirées du livre de Pierre Dagnélie [Dag98b].

....

Éléments de corrigé : Les cyclamens

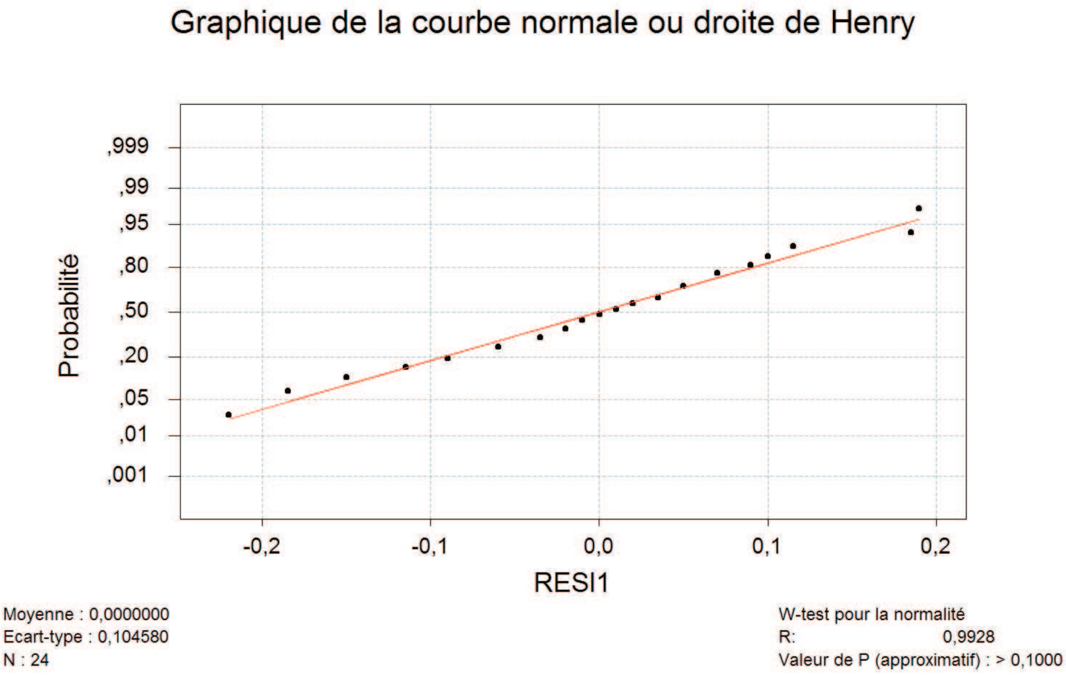
```
Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    Milieu  Plante
NivConf     95,0000

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 1,671
P :                   0,187

W-test pour la normalité
R:                              0,9928)
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```



```
Moyenne : 0,0000000
Ecart-type : 0,104580
N : 24

W-test pour la normalité
R:                    0,9928
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Figure 11.12 – **Graphique : Test de normalité**.

```
Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    Milieu  Plante
NivConf     95,0000
```

```
Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 8,702
P :                   0,275
```

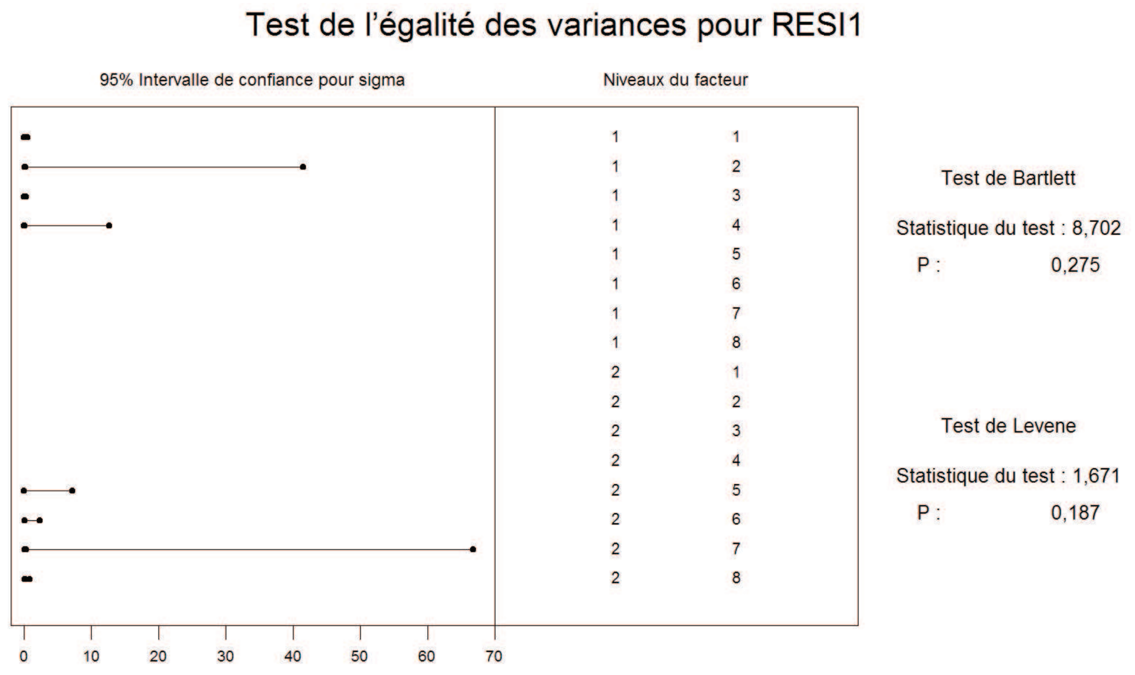


Figure 11.13 – **Graphique : Test de l'égalité des variances**.

```
Modèle linéaire généralisé : Croissance en fonction de Milieu; Plante


Facteur            Type Niveaux  Valeurs
Milieu             fixe       2  1 2
Plante(Milieu)     fixe       8  1 2 3 4 1 2 3 4

Analyse de la variance pour Croissan, en utilisant la SC ajustée pour
les tests

Source           DL     SC séq   SC ajust   CM ajust      F      P
Milieu            1    0,17340    0,06825    0,06825   4,34  0,054
Plante(Milieu)    6    0,24645    0,24645    0,04107   2,61  0,058
Erreur           16    0,25155    0,25155    0,01572
Total            23    0,67140

Terme                 Coef      Er-T coef         T       P
Constante          0,80438        0,02730     29,47   0,000
Milieu
```

```
1                -0,05687       0,02730    -2,08  0,054
(Milieu)Plante
 1      1        -0,07750       0,05864    -1,32  0,205
 1      2         0,10750       0,07351     1,46  0,163
 1      3        -0,17750       0,05864    -3,03  0,008
 2      1        -0,07125       0,07374    -0,97  0,348
 2      2         0,10875       0,06424     1,69  0,110
 2      3        -0,05625       0,07374    -0,76  0,457
```

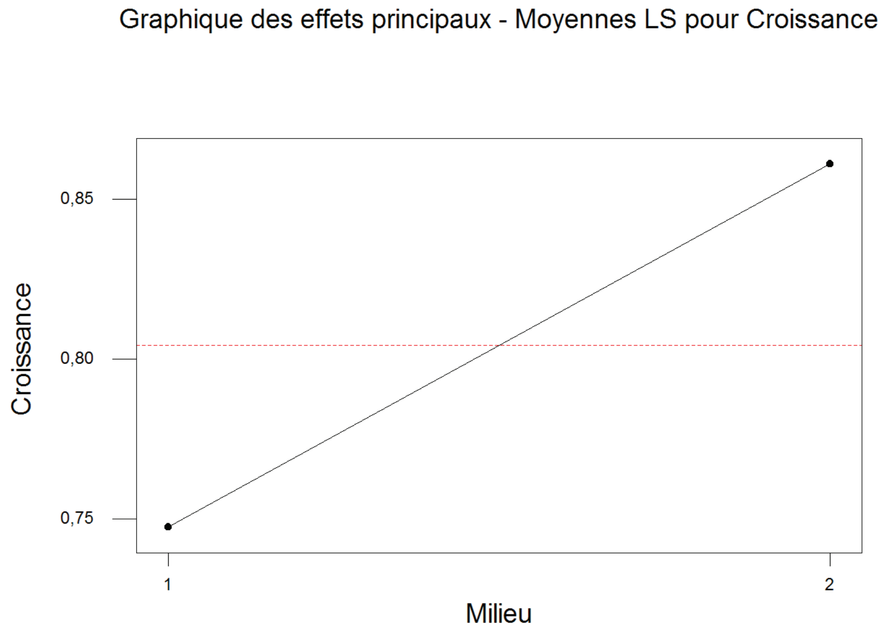


Figure 11.14 – **Graphique : Effets principaux**.

…………

11.4. Analyse de la variance à trois facteurs

11.4.1. Sans répétition

Détermination d'une fumure optimale pour le blé[10]

Une expérience en blocs aléatoires complets a été réalisée sur du blé au Rwanda. Trois doses d'acide phosphorique (100, 200 et 300 kg/ha) et trois doses de chaux (1000, 4500 et 8000 kg/ha) ont été testées. Les neufs combinaisons des engrais ont été affectées chacune au hasard et indépendamment à une parcelle au sein de chacun des trois blocs et les rendements obtenus reportés dans le tableau suivant.

---

[10] Les données de cet exercice sont inspirées du livre de Pierre Dagnélie [Dag98b].

Fumures		Bloc		
P_2O_5	CaO	1	2	3
1	1	1,30	0,80	2,01
1	2	2,05	2,37	2,52
1	3	2,07	2,60	2,25
2	1	2,25	2,36	2,71
2	2	2,99	2,92	3,63
2	3	2,62	2,89	3,43
3	1	2,61	2,36	3,29
3	2	3,22	2,93	3,85
3	3	3,15	3,35	3,67

1. Quel modèle d'analyse de la variance pouvons-nous utiliser avec ces données ? Le plan est-il équilibré ? Il y a-t-il des facteurs à effets aléatoires ?
2. Nous décidons dans cette question de négliger l'influence du facteur *bloc*. Procéder à l'étude de ces données en utilisant le modèle d'analyse de la variance à deux facteurs le plus complet que nous pouvons utiliser.
3. Nous décidons dans cette question de ne plus négliger l'influence du facteur *bloc*. Procéder à l'étude de ces données en utilisant le modèle d'analyse de la variance à trois facteurs le plus complet que nous pouvons utiliser.

. . . .

Éléments de corrigé : Détermination d'une fumure optimale pour le blé

En absence de répétitions, nous ne pouvons tester l'hypothèse d'homogénéité des variances des erreurs. Nous nous contentons de vérifier partiellement cette hypothèse par rapport à chacun des couples de trois variables $(P2O5, CaO)$, $(P2O5, Bloc)$ et $(CaO, Bloc)$.

```
Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    P2O5  CaO
NivConf     95,0000

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,904
```

```
P :                   0,534

Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    P2O5  Bloc
NivConf     95,0000

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,626
P :                   0,746

Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    CaO  Bloc
NivConf     95,0000

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,880
P :                   0,551

W-test pour la normalité
R:                           0,9856)
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000


Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    P2O5  CaO
NivConf     95,0000

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 12,426
P :                    0,133


Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    P2O5  Bloc
NivConf     95,0000

Test de Bartlett (loi normale)
```

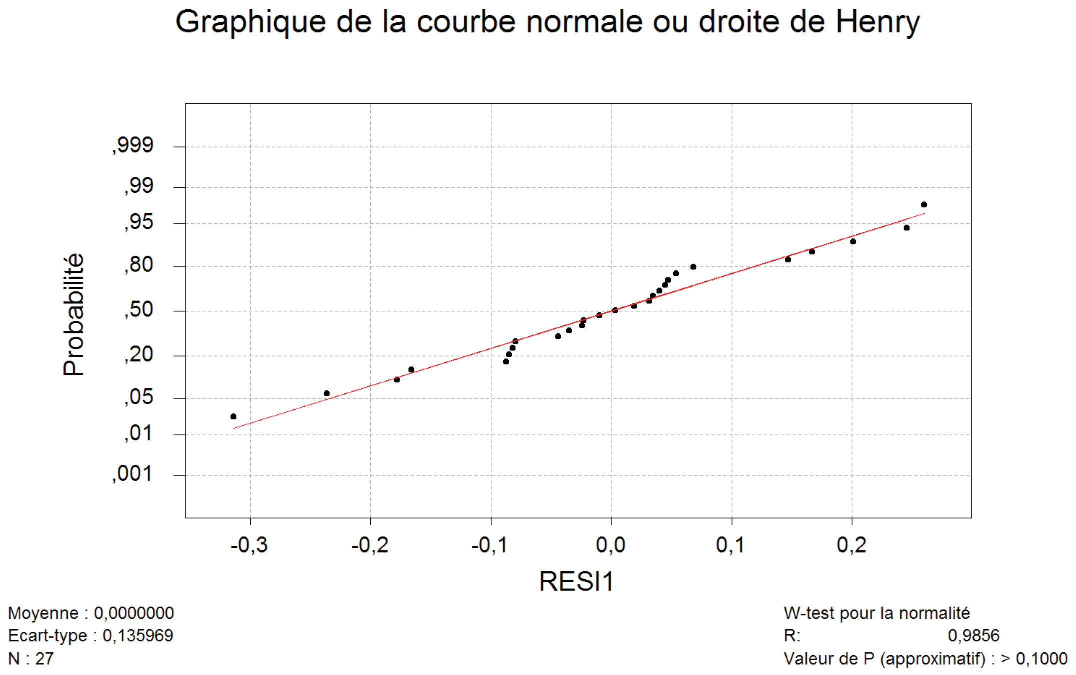


Figure 11.15 – **Graphique : Test de normalité.**

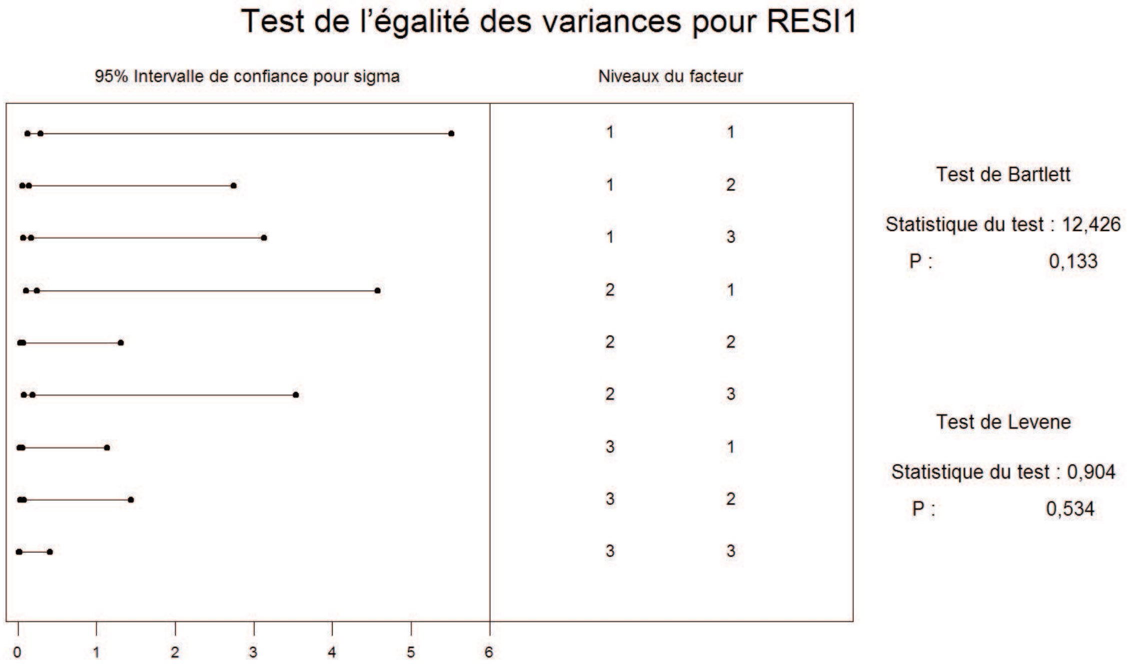


Figure 11.16 – **Graphique : Test de l'égalité des variances.**

```
Statistique du test : 14,135
P :                     0,078


Test de l'égalité des variances
```

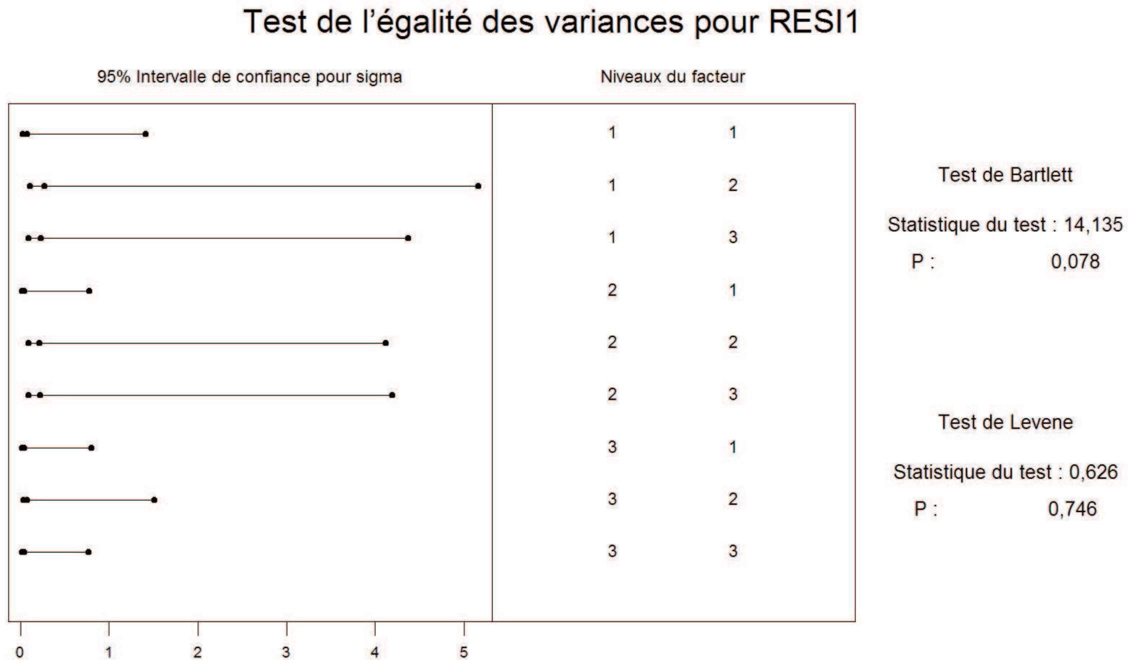


Figure 11.17 – **Graphique : Test de l'égalité des variances.**

```
Réponse     RESI1
Facteurs    CaO  Bloc
NivConf     95,0000

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 11,554
P :                    0,172


Modèle linéaire généralisé : Rendement en fonction de P2O5; CaO; Bloc


Facteur      Type Niveaux  Valeurs
P2O5         fixe       3  1 2 3
CaO          fixe       3  1 2 3
Bloc    aléatoire       3  1 2 3

Analyse de la variance pour Rendemen, en utilisant la SC ajustée pour
les tests

Source      DL     SC séq   SC ajust   CM ajust       F      P
P2O5         2    6,57916    6,57916    3,28958  103,02  0,000
CaO          2    3,20379    3,20379    1,60189   16,72  0,011
Bloc         2    1,81336    1,81336    0,90668   13,40  0,108 x
```

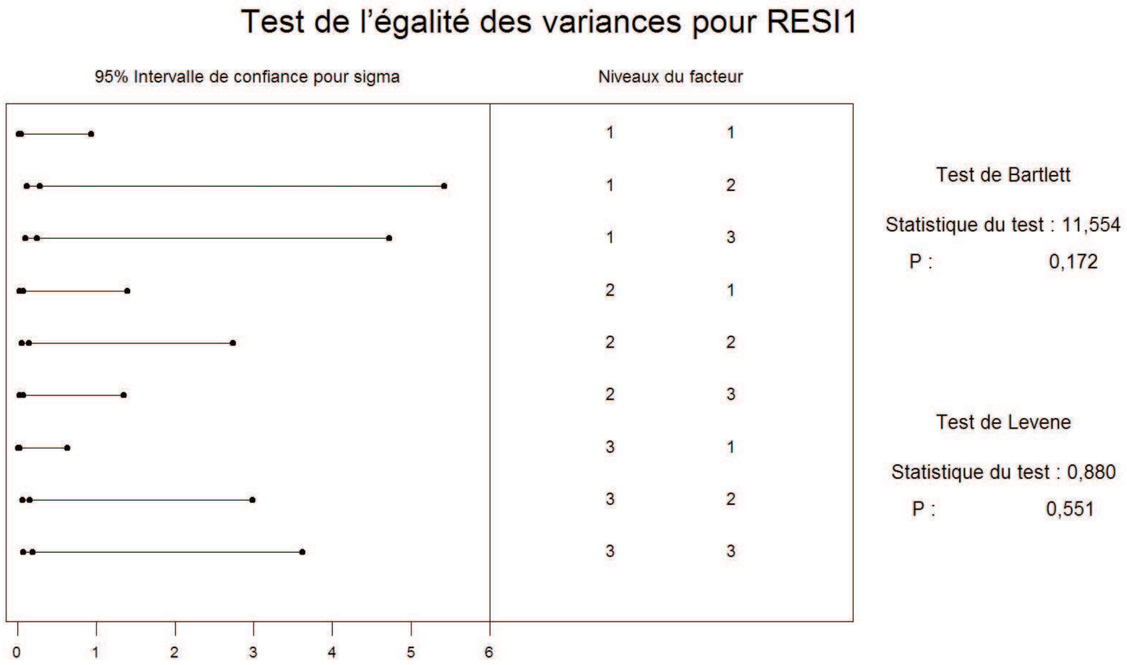


Figure 11.18 – **Graphique : Test de l'égalité des variances**.

```
P2O5*CaO     4    0,18764    0,18764    0,04691    0,78  0,568
P2O5*Bloc    4    0,12773    0,12773    0,03193    0,53  0,717
CaO*Bloc     4    0,38330    0,38330    0,09583    1,59  0,266
Erreur       8    0,48067    0,48067    0,06008
Total       26   12,77565

x Pas un test F exact.

Terme           Coef      Er-T coef        T      P
Constante    2,67407        0,04717    56,69  0,000
P2O5
1           -0,67741        0,06671   -10,15  0,000
2            0,19259        0,06671     2,89  0,020
CaO
1           -0,48630        0,06671    -7,29  0,000
2            0,26815        0,06671     4,02  0,004
Bloc
1           -0,20074        0,06671    -3,01  0,017
2           -0,16519        0,06671    -2,48  0,038
P2O5*CaO
1    1      -0,14037        0,09435    -1,49  0,175
1    2       0,04852        0,09435     0,51  0,621
2    1       0,05963        0,09435     0,63  0,545
2    2       0,04519        0,09435     0,48  0,645
P2O5*Bloc
1    1       0,01074        0,09435     0,11  0,912
```

```
1    2       0,09185        0,09435     0,97  0,359
2    1      -0,04593        0,09435    -0,49  0,639
2    2       0,02185        0,09435     0,23  0,823
CaO*Bloc
1   1        0,06630        0,09435     0,70  0,502
1   2       -0,18259        0,09435    -1,94  0,089
2   1        0,01185        0,09435     0,13  0,903
2   2       -0,03704        0,09435    -0,39  0,705
```

Remarque :

Nous remarquons qu'ici Minitab© 15 se comporte de manière étrange pour réaliser le test de l'effet du facteur *Bloc*. En effet, comme indiqué dans le cours, la statistique de ce test suit une exactement une loi de Fisher à $K-1=2$ et $(I-1)(J-1)(K-1)=2\times2\times2=8$ degrés de liberté. Minitab© réalise ici l'approximation de Satterthwaite alors que cela n'est pas justifié.
Minitab© ne gère pas convenablement les modèles mixtes d'analyse de la variance à deux facteurs ou plus. Il faut ainsi vérifier systématiquement les résultats obtenus ce logiciel en les comparant avec les tableaux qui sont fournis dans le cours.
Il existe en fait deux manières de construire les modèles mixtes en analyse de la variance : l'approche restreinte (restricted anova models) et l'approche non restreinte (non-restricted anova models). Les statisticiens sont divisés entre ces deux points de vue et nous avons présenté dans le cours uniquement des modèles restreints. Ceux-ci présentent en effet l'avantage d'une interprétation directe plus aisée. Le logiciel Minitab© utilise, dans la fonction Modèle linéaire général, des modèles non restreints et il n'est pas possible, avec la version 15, de changer ce comportement. Par contre, la fonction ANOVA, qui ne peut traiter que des plans équilibrés, permet de choisir une approche restreinte ou non. Dans le cas du jeu de données ci-dessus, elle fourni donc le bon résultat.

....

11.4.2. Avec répétitions

Rendement de blé [11]

Nous étudions le rendement du blé en fonction des trois variables suivantes : la présence ou l'absence d'irrigation, la quantité d'engrais apportée (faible, moyenne ou importante) et la présence ou l'absence de fongicide. Pour chaque combinaison des facteurs, deux essais ont été mis en place.

---

[11] Les données de cet exercice sont tirées du livre d'exercices de François Husson et de Jérôme Pagès [HPer].

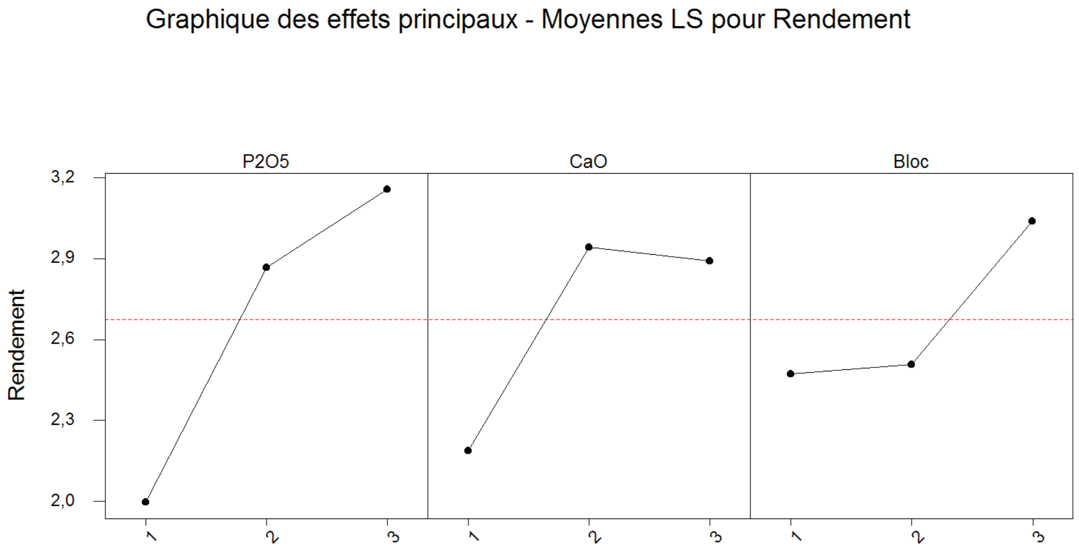


FIGURE 11.19 – **Graphique : Effets principaux**.

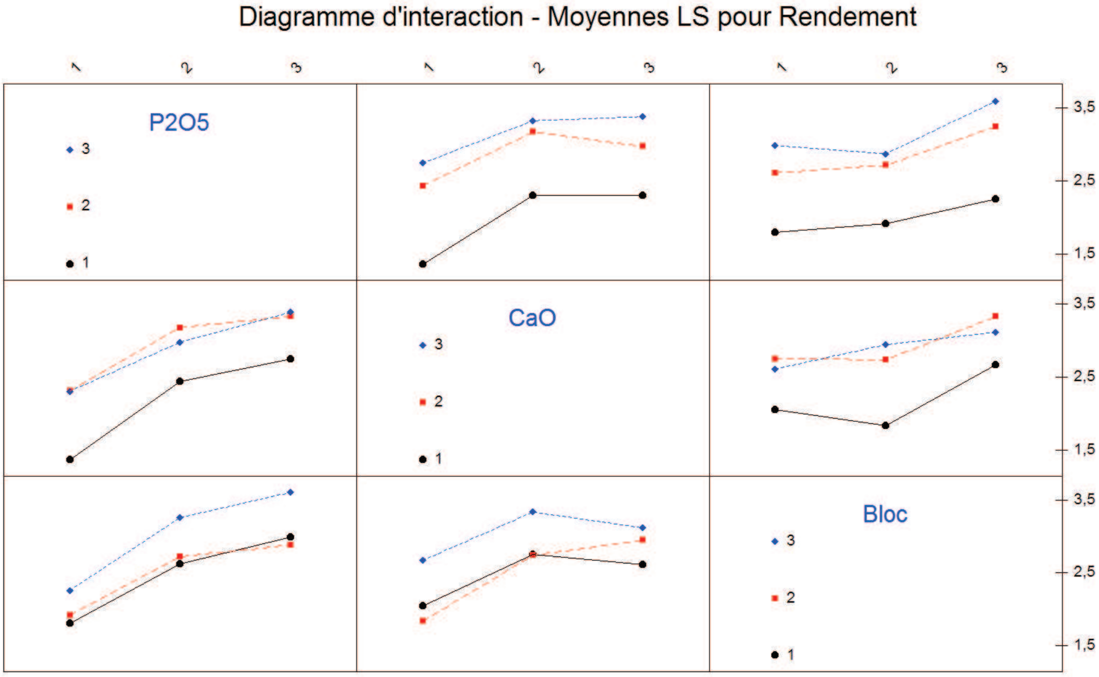


FIGURE 11.20 – **Graphique : Diagramme des interactions**.

1. Définir le modèle (sous la forme indicée) que nous utilisons si nous considérons que toutes les interactions d'ordre 2 sont présentes.

Les interactions *fongicide* × *engrais* et *fongicide* × *irrigation* sont considérées a priori comme négligeables par l'expérimentateur.

2. Déterminer les valeurs de tous les coefficients du modèle.

3. Décrire le test de significativité de l'interaction *irrigation* × *engrais*. Conclure.
4. Y a-t-il un effet *engrais* (Décrire le test et la décision) ? Pour le facteur *engrais*, la modalité « importante » fait-elle varier le rendement significativement par rapport au rendement moyen (Décrire le test et la décision) ?
5. Quel rendement pouvons-nous prévoir dans les conditions suivantes : avec irrigation, avec fongicide et une dose d'engrais importante ?

…………

Éléments de corrigé : Rendement de blé

1. Le modèle s'écrit, en notant $Y_{i,j,k,l}$ le rendement de la $l-$ème parcelle cultivée avec l'irrigation i, le fongicide j et la dose d'engrais k :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{i,j} + (\alpha\gamma)_{i,k} + (\beta\gamma)_{j,k} + \epsilon_{i,j,k,l}$$
$$\text{avec } i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ k = 1 \ldots 3,\ l = 1, 2$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires}$$
$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{3} \gamma_k = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, 2\} \text{ et } \sum_{j=1}^{2} (\alpha\beta)_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, 2\},$$
$$\sum_{i=1}^{2} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, 3\} \text{ et } \sum_{k=1}^{3} (\alpha\gamma)_{i,k} = 0,\ \forall i \in \{1, 2\}\,,$$
$$\sum_{j=1}^{2} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, 3\} \text{ et } \sum_{k=1}^{3} (\beta\gamma)_{j,k} = 0,\ \forall j \in \{1, 2\}\,,$$

avec les hypothèses suivantes pour les résidus :

$$\forall\ (i, j, k, l)\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i, j, k, l) \neq (m, n, o, p).$$

2. Les contraintes imposées par le modèle donnent les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{2} \widehat{\alpha_i}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ donc } \alpha_{\widehat{\text{avec irrigation}}}(\boldsymbol{y}) = -\alpha_{\widehat{\text{sans irrigation}}}(\boldsymbol{y}) = 4,8922$$

$$\sum_{j=1}^{2} \widehat{\beta_j}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ donc } \beta_{\widehat{\text{avec fongicide}}}(\boldsymbol{y}) = -\alpha_{\widehat{\text{sans fongicide}}}(\boldsymbol{y}) = 3,8917$$

$$\sum_{k=1}^{3} \widehat{\gamma_k}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ donc } \gamma_{\widehat{\text{engrais important}}}(\boldsymbol{y}) = -\gamma_{\widehat{\text{engrais moyen}}}(\boldsymbol{y}) - \gamma_{\widehat{\text{engrais faible}}}(\boldsymbol{y}) = 11,2751$$

$$\forall i\ \in \{1, 2\}\,,\ \sum_{k=1}^{3} \widehat{\alpha}\gamma_{i,k}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ donc :}$$

$$\widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng imp}}(\boldsymbol{y}) = -\widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng faible}}(\boldsymbol{y}) - \widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng moy}}(\boldsymbol{y}) = 0,7960$$

$$\forall k \ \in \{1,2,3\}\,,\ \sum_{i=1}^{2} \widehat{\alpha\gamma}_{i,k}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng imp}}(\boldsymbol{y}) &= -\widehat{\alpha\gamma}_{\text{av irr,eng imp}}(\boldsymbol{y}) = -0,7960\\
\widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng moy}}(\boldsymbol{y}) &= -\widehat{\alpha\gamma}_{\text{av irr,eng moy}}(\boldsymbol{y}) = 0,9467\\
\widehat{\alpha\gamma}_{\text{ss irr,eng faib}}(\boldsymbol{y}) &= -\widehat{\alpha\gamma}_{\text{av irr,eng faib}}(\boldsymbol{y}) = -0,1507.
\end{aligned}$$

Les autres coefficients étaient renseignés dans le tableau fourni avec l'énoncé.

3. Test de significativité de l'interaction *irrigation* × *engrais* :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \forall(i,k), (\alpha\gamma)_{i,k} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \exists(i_0,k_0), (\alpha\gamma)_{i_0,k_0} \neq 0.}$$

La statistique de test utilisée est :

$$F = \frac{CM_{\text{interaction}}}{CM_{\text{résiduelle}}}.$$

Ici $ddl_{\text{interaction}} = (I-1)(K-1) = 2$ et $ddl_{\text{résiduelle}} = n-1-(I-1)-(J-1)-(K-1)-(I-1)(K-1) = 24-1-1-1-2-2 = 17$. Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et une hypothèse de normalité des données, F suit une loi de Fisher à 2 et 17 degrés de liberté. Décision : soit nous comparons f_{obs} avec le quantile $1-\alpha$ de la loi de Fisher à 2 et 17 degrés de liberté, soit nous comparons la $p-$valeur avec le seuil α du test. Ici la $p-$valeur vaut $0,7535$, nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de $\alpha = 5$ %. Nous considérons donc qu'il n'y a pas d'interaction entre le facteur *irrigation* et le facteur *engrais*.

4. La probabilité critique du test pour l'effet *engrais* est inférieure à $0,0005$, nous en déduisons que le test est significatif : il y a un effet engrais. Nous nous demandons si le coefficient $\gamma_{\text{eng imp}}$ est significativement différent de 0 au seuil $\alpha = 5$ %. Pour cela nous testons l'hypothèse $\mathcal{H}_0 \ : \gamma_{\text{eng imp}} = 0 \qquad \mathcal{H}_1 \ : \gamma_{\text{eng imp}} \neq 0$. La statistique du test est $\dfrac{\widehat{\gamma_{\text{eng imp}}}}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\gamma_{\text{eng imp}}}}}$ et suit, sous l'hypothèse nulle, une loi de Student avec autant de degrés de liberté que ceux de la variance résiduelle (i.e. 17). La probabilité critique associée à cette valeur est $< 0,0005$ donc $< \alpha = 0,05$. Par conséquent les rendements observés pour un apport important d'engrais sont significativement supérieurs (en moyenne de 11,2751) au rendement moyen.

5. Le modèle retenu est le modèle sans interaction :

$$Y_{i,j,k,l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \epsilon_{i,j,k,l}, \quad i = 1\ldots 2,\ j = 1,2,\ k = 1\ldots 3,\ l = 1,2$$
$$\text{avec les contraintes } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{3} \gamma_k = 0,$$

et les hypothèses suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k,l)\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k,l}) = \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k,l}, \epsilon_{m,n,o,p}) = 0 \text{ si } (i,j,k,l) \neq (m,n,o,p).$$

Les estimations des paramètres des effets principaux sont identiques dans le modèle avec ou sans interaction car les données sont équilibrées (cf cours sur les plans d'expérience).

$$Y_{\text{av irr,}\widehat{\text{av fon}}\text{,eng imp}}(\boldsymbol{y}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\alpha_{\text{av irr}}}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\beta_{\text{av fon}}}(\boldsymbol{y}) + \widehat{\gamma_{\text{eng imp}}}(\boldsymbol{y}) = 88,68 \text{ qx/ha.}$$

....

Résistance de panneaux de particules à l'arrachage des clous [12]

Une des qualités essentielles des panneaux agglomérés constitués de particules ou de fibres de bois est la résistance de ces panneaux à l'arrachage des clous. Au cours d'une étude nous avons étudié simultanément l'influence de trois facteurs : la grosseur des clous, le diamètre des anneaux sur lesquels sont déposées les éprouvettes soumises aux essais et la vitesse d'arrachage.
Les essais ont été effectués sur des éprouvettes carrées de 50 *mm* de côté, les modalités des trois facteurs sont :

-i- le diamètre de la tête des clous est soit de 6,5 *mm* soit de 8 *mm*,

-ii- le diamètre des anneaux servant de support est soit de 22 *mm* soit de 30 *mm*,

-iii- les vitesses d'arrachage ont été de 22, 45 et 90 par minute.

De plus 5 éprouvettes ont été utilisées pour chacune des 12 combinaisons des modalités du facteur.
Nous disposons ainsi au total de 60 résultats de la mesure de la résistance de panneaux de particules à l'arrachage des clous exprimée en *kg*.

---

[12] Les données de cet exercice sont tirées du livre de Pierre Dagnélie [Dag98b].

grosseur	anneaux	vitesse	essai	resistance
1	1	1	1	54
1	1	1	2	56
1	1	1	3	58
1	1	1	4	51
1	1	1	5	57
1	1	2	1	57
1	1	2	2	58
1	1	2	3	61
1	1	2	4	59
1	1	2	5	55
1	1	3	1	60
1	1	3	2	68
1	1	3	3	61
1	1	3	4	61
1	1	3	5	67
1	2	1	1	54
1	2	1	2	51
1	2	1	3	47
1	2	1	4	51
1	2	1	5	59
1	2	2	1	52
1	2	2	2	56
1	2	2	3	52
1	2	2	4	52
1	2	2	5	53
1	2	3	1	63
1	2	3	2	54
1	2	3	3	65
1	2	3	4	62
1	2	3	5	60

grosseur	anneaux	vitesse	essai	resistance
2	1	1	1	67
2	1	1	2	71
2	1	1	3	72
2	1	1	4	70
2	1	1	5	81
2	1	2	1	79
2	1	2	2	80
2	1	2	3	81
2	1	2	4	80
2	1	2	5	85
2	1	3	1	78
2	1	3	2	78
2	1	3	3	77
2	1	3	4	83
2	1	3	5	79
2	2	1	1	67
2	2	1	2	66
2	2	1	3	62
2	2	1	4	71
2	2	1	5	69
2	2	2	1	72
2	2	2	2	67
2	2	2	3	75
2	2	2	4	70
2	2	2	5	71
2	2	3	1	78
2	2	3	2	81
2	2	3	3	67
2	2	3	4	76
2	2	3	5	75

1. Quel modèle d'analyse de la variance pouvons-nous utiliser avec ces données ? Le plan est-il équilibré ? Il y a-t-il des facteurs à effets aléatoires ?
2. Nous décidons dans cette question de négliger l'influence du facteur *essai*. Procéder à l'étude de ces données en utilisant le modèle d'analyse de la variance à trois facteurs le plus complet que nous pouvons utiliser.

....

Éléments de corrigé : Résistance de panneaux de particules à l'arrachage des clous

```
Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    grosseur  anneaux  vitesse
NivConf     95,0000

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,436
P :                   0,932
```

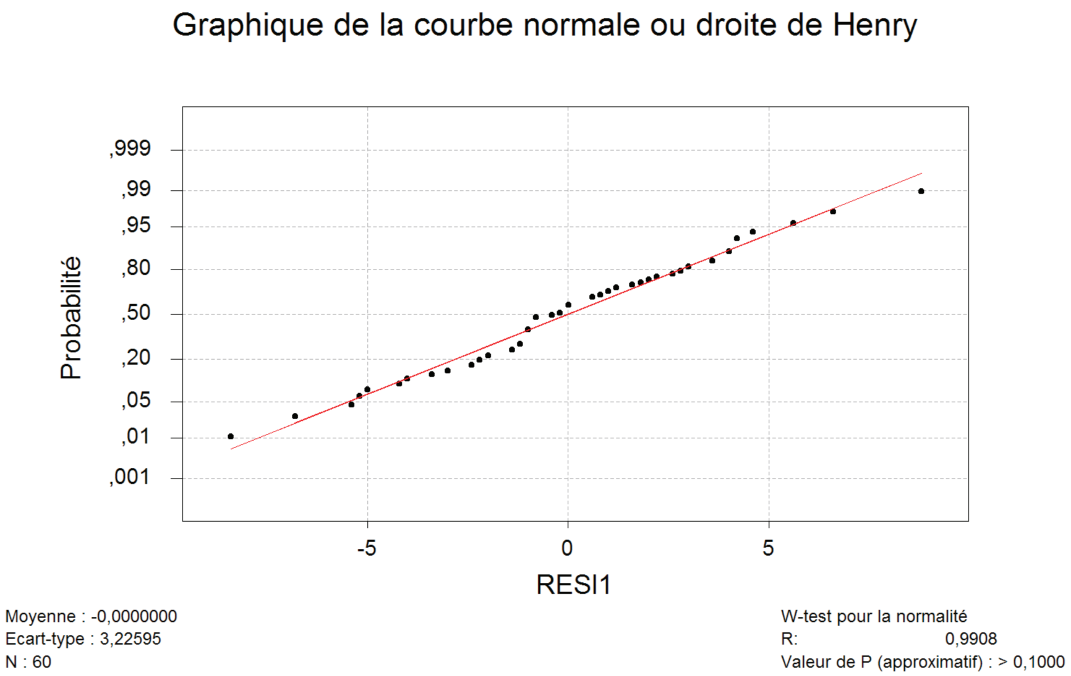


FIGURE 11.21 – **Graphique : Test de normalité.**

```
W-test pour la normalité
R:                               0,9908
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000

Test de l'égalité des variances

Réponse     RESI1
Facteurs    grosseur  anneaux  vitesse
NivConf     95,0000

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test :  9,893
P :                    0,540
```

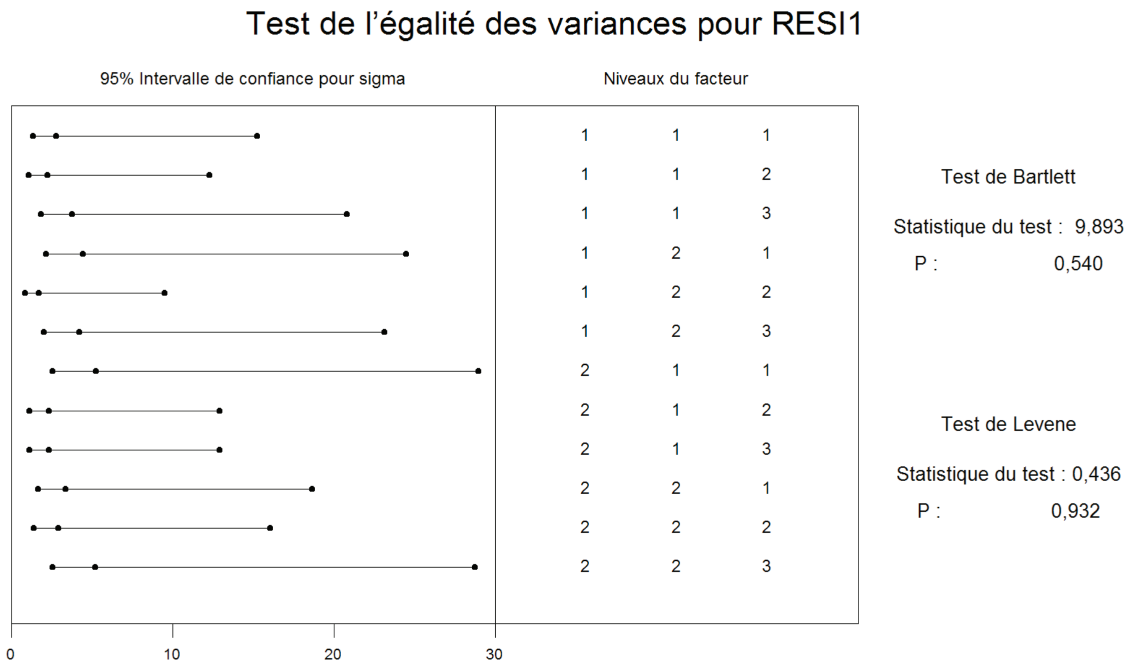


Figure 11.22 – **Graphique : Test de l'égalité des variances.**

```
Modèle linéaire généralisé : resistance en fonction de anneaux; grosseur; ...

Facteur      Type Niveaux  Valeurs
anneaux      fixe       2  1 2
grosseur     fixe       2  1 2
vitesse      fixe       3  1 2 3

Analyse de la variance pour resistan, en utilisant la SC ajustée pour
les tests

Source            DL     SC séq    SC ajust    CM ajust        F       P
anneaux            1     355,27     355,27      355,27     27,77  0,000
grosseur           1    4403,27    4403,27     4403,27    344,23  0,000
vitesse            2     632,10     632,10      316,05     24,71  0,000
anneaux*grosseur   1      29,40      29,40       29,40      2,30  0,136
grosseur*vitesse   2      86,23      86,23       43,12      3,37  0,043
anneaux*vitesse    2      54,03      54,03       27,02      2,11  0,132
anneaux*           2      10,30      10,30        5,15      0,40  0,671
grosseur*vitesse
Erreur            48     614,00     614,00       12,79
Total             59    6184,60

Terme                          Coef      Er-T coef        T       P
Constante                   65,7000         0,4617   142,29   0,000
anneaux
1                            2,4333         0,4617     5,27   0,000
```

```
grosseur
1                           -8,5667         0,4617   -18,55  0,000
vitesse
1                           -4,0000         0,6530    -6,13  0,000
2                            0,0500         0,6530     0,08  0,939
anneaux*grosseur
1       1                   -0,7000         0,4617    -1,52  0,136
grosseur*vitesse
1        1                   0,6667         0,6530     1,02  0,312
1        2                  -1,6833         0,6530    -2,58  0,013
anneaux*vitesse
1       1                   -0,4333         0,6530    -0,66  0,510
1       2                    1,3167         0,6530     2,02  0,049
anneaux*grosseur*vitesse
1       1        1           0,1000         0,6530     0,15  0,879
1       1        2          -0,5500         0,6530    -0,84  0,404
```

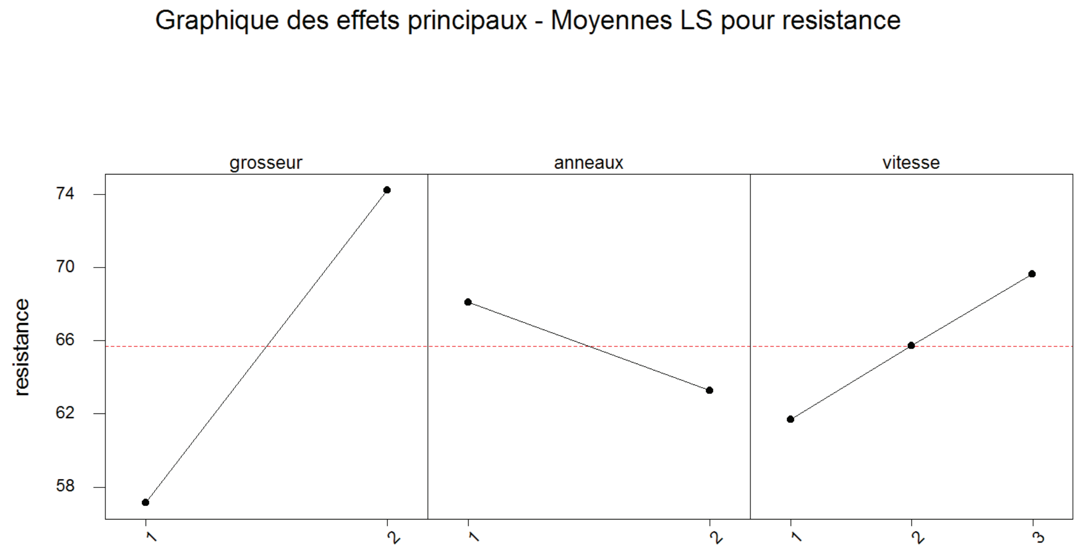


Figure 11.23 – **Graphique : Effets principaux**.

....

11.5. Analyse de la variance à trois facteurs totalement emboîtés

Nous renvoyons le lecteur à l'exemple page 337 du livre de Pierre Dagnélie [Dag98b].

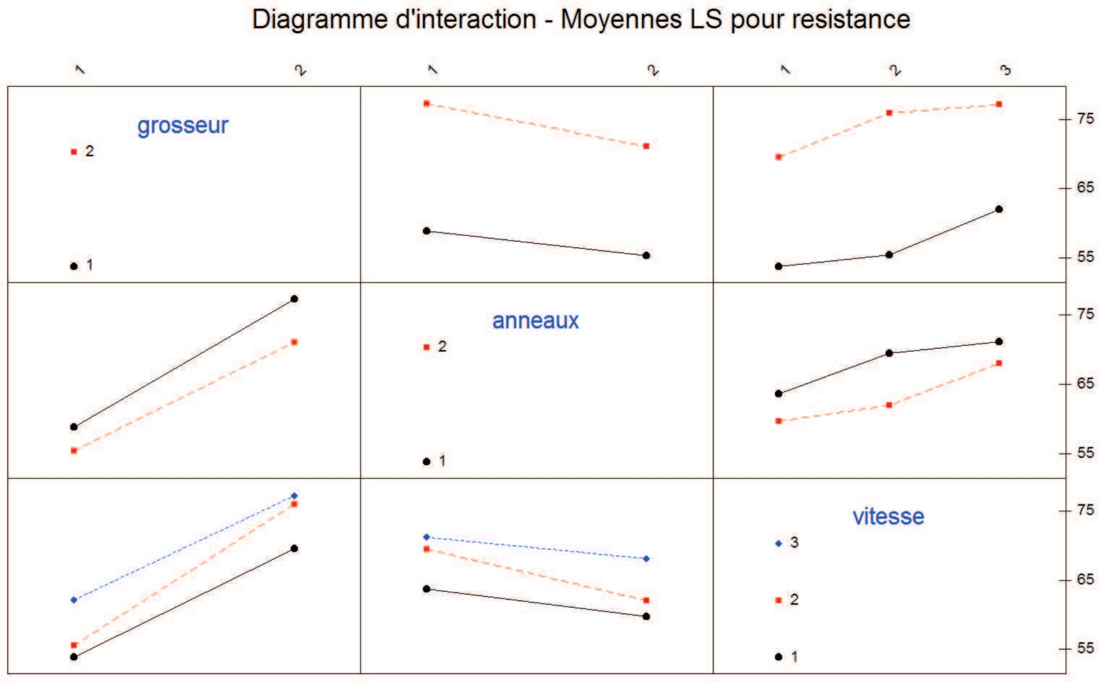


Figure 11.24 – **Graphique : Diagramme des interactions**.

....

11.6. Analyse de la variance à trois facteurs partiellement emboîtés

Nous renvoyons le lecteur à l'exemple page 340 du livre de Pierre Dagnélie [Dag98b].

....

Chapitre 12

Modèles statistiques

12.1. Introduction

Ce chapitre a pour but de faire un rapide exposé de ce qui est appelé un modèle statistique tout en permettant de revoir, ou de découvrir, certaines des notions que vous avez apprises auparavant.

12.2. Modèle statistique

12.2.1. Relations

Pourquoi avons-nous besoin des statistiques pour analyser des résultats expérimentaux ?

Il existe plusieurs types de relations entre des grandeurs physiques comme la masse, la taille, la température...

Nous en distinguons principalement deux :
- les relations **déterministes** comme celle qui lie l'expression d'une température en degré Celsius et l'expression de cette même température en Kelvin. Ici rien de plus mystérieux qu'une addition à faire et étant donné une même température de départ le résultat sera toujours le même.
- les relations **stochastiques** comme celle qui lie la masse d'un individu à sa taille. Nous ne pouvons pourtant pas nier qu'il y a une association entre la taille et la masse d'une personne mais celle-ci n'est pas aussi simple que celle ci-dessus. En effet si vous comparez la masse de deux personnes qui ont la même taille il est fort probable que celles-ci diffèrent.

Pourtant une telle relation existe. Comment pouvons-nous alors la mettre en évidence ?

Pour mettre en équation la relation précédente entre le poids et la masse nous écrivons :

$$Masse(Individu) = Fonction(Taille_{Individu}) + Erreur(Individu).$$

Ce que nous appelons *Erreur* représente la variabilité inter-individu, c'est-à-dire ce qui permet d'expliquer pourquoi deux personnes de même taille n'auront pas la même masse.

Problème :

Comment trouver *Fonction* et *Erreur* ?

Nous ne connaîtrions vraiment *Fonction* et *Erreur* que si nous réalisions une infinité d'expériences !

C'est pourquoi en statistique nous adoptons la démarche opposée.

Réponse

Nous allons **proposer** des candidats pour *Fonction* et *Erreur* puis évaluer l'**adéquation** du modèle proposé avec la réalité.

12.2.2. Le cas de l'erreur

Jusqu'à présent nous vous avons sans doute dit d'utiliser des erreurs qui suivent des lois normales, mais savez-vous pourquoi ?

Dans beaucoup de problèmes expérimentaux l'erreur qui vient perturber le résultat d'une expérience est la somme de plus petites erreurs du même ordre et indépendantes.

Un théorème de probabilité, le **théorème de la limite centrale**, que vous avez dû rencontrer en L2, nous dit qu'alors une bonne approximation de la loi de la variable aléatoire d'**erreur** peut être réalisée en utilisant une **loi normale**.

Bien entendu ceci ne fonctionne pas à tous les coups et il existe alors des alternatives :
- changer la loi de l'erreur ;
- utiliser des tests comme celui de Kruskal-Wallis qui ne fait quasiment pas d'hypothèse sur la loi des erreurs.

12.2.3. Choix d'une fonction

Quelles sont les fonctions que nous pouvons utiliser ?

Appelons Y la réponse observée, ou facteur expliqué, et X le facteur explicatif.

$$Y = f(X) + \epsilon.$$

La réponse à cette question dépend avant tout de la nature de la variable X.

- Si X est une variable continue comme le poids ou la taille nous pourrons utiliser $f(X) = a * X + b$.

- Si X est une variable discrète nous utiliserons plutôt, en notant X_i les différentes valeurs possibles pour X, $f(X_i) = \mu + \alpha_i$.

12.2.4. Synthèse

Nous résumons ce que nous venons de voir à propos des modèles statistiques.

- Si X est continue nous nous intéresserons à une relation du type
$$Y = a * X + b + \epsilon,$$
où les variables d'erreurs ϵ suivent toute une loi normale. Cette situation est celle de l'analyse de régression simple.
- Si X est discrète nous nous intéresserons à une relation du type
$$Y = \mu + X_i + \epsilon,$$
où les variables d'erreurs ϵ suivent toute une loi normale. Cette situation est celle de l'analyse de la variance à un facteur contrôlé.

12.3. Un cas concret : l'analyse de la variance à un facteur contrôlé

12.3.1. Introduction

Supposons que nous mesurions plusieurs fois une même grandeur nous trouverions en général des résultats différents. De très nombreux facteurs peuvent influencer les résultats et il n'est pas possible de tous les étudier. Nous en sélectionnons un certain nombre : nous retiendrons ainsi ceux qui a priori peuvent justifier une grande part de la dispersion des mesures.

Ces facteurs sur lesquels nous fixons notre attention seront dits facteurs contrôlés. Ceci implique qu'avant d'effectuer les mesures nous aurons pris des dispositions pour qu'ils soient maintenus constants et mesurés.

Pour l'instant nous ne nous intéressons qu'au cas où il y a un seul facteur contrôlé.

L'expérimentateur peut se poser alors différentes questions :
- Le phénomène étudié est-il ou non influencé par le facteur contrôlé ?
- Si la réponse est affirmative, quelle est alors la modalité la plus intéressante ?

12.3.2. Modèle statistique

Nous introduisons le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \dots I,\ j = 1 \dots J,$$
$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ est la valeur prise par la réponse Y dans la condition A_i lors de la $j-$ème répétition. Nous postulons les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leqslant i,k \leqslant I,\ \text{ et } 1 \leqslant j,l \leqslant J.$$

Notez qu'ici le plan de l'analyse de la variance est dit **équilibré** car il y a le même nombre de répétitions pour tous les niveaux du facteur.

Remarquons que $y_{i,j}$ n'est pas égal à $Y_{i,j}$. Dans le premier cas $y_{i,j}$ est une valeur mesurée dans le second cas $Y_{i,j}$ est une variable aléatoire.

Nous voyons ainsi que nous faisons plusieurs hypothèses très **importantes**. Dans chaque cas où vous essayerez d'utiliser cette outil statistique vous **devrez** vérifier que les hypothèses que nous faisons sont compatibles avec les données expérimentales dont vous disposez.
Si vous utilisez un outil statistique alors qu'il n'est pas adapté vous obtiendrez des résultats qui peuvent être trompeurs voire complètement **faux**.
Votre logiciel de calcul statistique ne s'occupera pas de cette partie du travail. Elle vous incombe exclusivement et est primordiale.

12.3.3. Les hypothèses

Le détail des hypothèses est le suivant :
- Indépendance des erreurs.
- Homoscédasticité (égalité des variances des erreurs).
- Normalité des erreurs.

L'indépendance des erreurs

Il n'existe pas de test permettant de déterminer si les erreurs sont indépendantes ou non.

Un test que vous pourrez rencontrer est le test de Durbin-Watson qui détermine s'il y a une corrélation temporelle entre les résidus. Une telle corrélation peut découler, par exemple, de l'utilisation d'un appareil de mesure qui se dérèglerait progressivement.
Généralement une représentation graphique des résidus permet de « voir » si l'hypothèse

est réaliste.

Attention aux données appariées !

Afin de tester la normalité des erreurs et l'égalité des variances nous devons calculer ce que nous appelons les résidus du modèle. En termes statistiques, il s'agit des réalisations des variables d'erreur $\epsilon_{i,j}$.

Nous devons donc commencer par calculer une estimation des paramètres $\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_I$ du modèle.

Nous noterons toujours une estimation d'un paramètre θ du modèle statistique par $\widehat{\theta}$.

Estimation

Il s'agit d'une valeur que nous calculons à partir des observations de telle sorte que nous jugeons qu'elle est une représentation de la valeur du paramètre θ.
Par exemple vous connaissez une estimation de la moyenne μ d'une population par un échantillon d'effectif K :

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{|K|}\sum_k x_k.$$

En vous référant au chapitre 2, nous sommes capable de calculer les estimations $\widehat{\mu}, \widehat{\alpha_1}, \ldots, \widehat{\alpha_I}$.

Les résidus

$$e_{i,j} = y_{i,j} - \mu - \alpha_i.$$

Un résidu $e_{i,j}$ n'est rien d'autre que le défaut d'ajustement du modèle statistique pour la $j-$ème répétition du $i-$ème niveau du facteur.

L'égalité des variances

Cette hypothèse est **primordiale**. En effet à la fois le test de Kruskal-Wallis (équivalent non-paramétrique de l'analyse de la variance) et l'ANOVA requièrent qu'elle soit vérifiée.

Il convient ainsi de la tester avant l'hypothèse de normalité de l'erreur. Puisque nous ne connaissons alors pas encore la loi des erreurs il faut utiliser un test **non-paramétrique**.

Il s'agit du test de Levene qui est utilisable dès que le nombre de répétitions pour chaque niveau du facteur est supérieur ou égal à trois.

Si l'hypothèse d'homoscédasticité est vérifiée nous pouvons passer à la vérification de l'hypothèse de normalité des erreurs.

Dans le cas contraire, Minitab$^{©}$ ne propose pas de test prenant en compte ce défaut. Si par contre vous avez accès à d'autres logiciels comme R$^{©}$, qui est gratuit et disponible sur internet mais assez difficile d'accès, SPSS$^{©}$, payant mais intuitif, ou SAS$^{©}$, pour les utilisateurs expérimentés uniquement, vous aurez à votre disposition des tests pouvant prendre en compte l'inégalité des variances.

La normalité des erreurs

Nous devons alors tester la normalité des variables d'erreur. Or les effectifs ne permettent généralement pas de séparer les différents niveaux du facteur explicatif et de tester la normalité des résidus pour chacun des niveaux.

Pour obtenir une puissance convenable cela exigerait plus d'une cinquantaine de répétitions par niveaux !

Nous décidons alors de regrouper tous les résidus ensemble et de procéder à **un** test de normalité sur tous les résidus.
Le nombre de tests de normalité existants est très important, il y a même des livres entiers sur le sujet... Lequel devons-nous utiliser ?

Les logiciels de calcul statistique mettent à la disposition de l'utilisateur plusieurs tests de normalité. Bien entendu ils ont tous leurs qualités mais dans le contexte qui est le notre, c'est-à-dire celui de petits échantillons, effectif entre 10 et 100, c'est le test de Shapiro-Wilk qui est recommandé.

Tous les logiciels mentionnés plus haut permettent de réaliser ce test et en particulier Minitab$^{©}$, attention il a été renommé en test de Ryan-Joiner.

Si le test de normalité des résidus est significatif, vous n'avez pas le droit d'utiliser les résultats de l'analyse de la variance.

Il vous faut alors opter pour une alternative non paramétrique, par exemple le test de Kruskal-Wallis.

Ce test est disponible dans le logiciel Minitab$^{©}$.

Si la normalité n'est pas rejetée, nous testons à nouveau l'hypothèse d'égalité des variances en utilisant cette fois-ci le test de Bartlett.

Ce test est plus puissant que le test de Levene car il repose sur une hypothèse de normalité des variables. C'est donc un test paramétrique.

Si l'hypothèse d'homoscédasticité n'est toujours pas rejetée, les conditions d'utilisation du modèle statistique sont alors vérifiées et nous pouvons examiner les résultats de l'analyse de la variance.

Chapitre 13

Estimation[1]

13.1. Définitions et notations

13.1.1. Population, individu, échantillon

Définition 13.1.1. La population *est l'ensemble de tous les éléments qui constituent cet ensemble.*

Exemples 13.1.1. *Un ensemble d'êtres humains, un ensemble d'objets ou de faits.*

Définition 13.1.2. *Chacun des membres de cette population est appelé* **individu**.

Définition 13.1.3. *Un sous-ensemble de la population est appelé* **échantillon**.

Définition 13.1.4. *La propriété qui fait l'objet de l'étude statistique doit être également précisée. Nous l'appelons* **variable statistique**.

13.1.2. Caractères quantitatif et qualitatif

Définition 13.1.5. Un caractère *est* **quantitatif** *s'il est mesurable et la liste des nombres exprimant ces mesures est appelée* **série statistique**.

Exemples 13.1.2. *La taille des habitants d'un pays, le poids des habitants d'un pays, les températures d'une capitale d'un pays.*

Définition 13.1.6. Un caractère *est* **qualitatif** *si les modalités échappent à la mesure.*

---

[1] Ce chapitre s'appuie principalement sur les livres de G. Demengel, P. Bénichou, N. Boy et J.-P. Pouget, [DBBP97], et de J.J. Droesbeke, [Dro01].

Exemples 13.1.3. *Les goûts pour un film, les goûts pour un aliment, l'appréciation d'un livre.*

Dans ce dernier cas, la nature du **caractère qualitatif** suggère souvent une répartition de la population en classes que nous pouvons numéroter.

Nous attachons alors à chaque individu le numéro de la classe à laquelle il appartient.

Nous sommes ainsi ramenés à traiter une liste de nombres, c'est-à-dire **une série statistique**.

13.1.3. Caractères discret et continu

Une autre distinction peut être faite sur la nature des nombres d'une série statistique.

Définition 13.1.7. *Un caractère est dit* **discret** *si les valeurs qu'il prend sont des nombres isolés, par exemple entières mais pas nécessairement.*

Exemples 13.1.4. *Le caractère « nombre de pièces dans un appartement » , le caractère « nombre d'étudiants en Master Éthologie-Écophysiologie Deuxième Année » , les températures en dixième degrés sont tous des nombres isolés.*

Définition 13.1.8. *Un caractère est dit* **continu** *si entre deux de ces valeurs nous pouvons toujours trouver une troisième.*

Exemples 13.1.5. *La taille des habitants d'un pays, exprimée en cm par exemple, se traduit par des nombres réels, le poids des habitants d'un pays, exprimé en kg, s'exprime par des nombres réels.*

C'est la nature de l'instrument de mesure qui permet seulement d'en obtenir une valeur approchée. Il est logique alors de considérer que les valeurs du caractère appartiennent à des intervalles appelés **classes**.

13.2. Paramètres de position

13.2.1. Le mode

Dans ce paragraphe, nous énoncerons les définitions de deux paramètres de position. Nous ne sommes pas exhaustifs. Simplement nous rappelons les définitions de ceux qui seront les plus utilisés dans ce cours.

Définition 13.2.1. Le mode ou les valeurs modales *d'une série statistique d'une variable discrète est la (ou les) valeur(s) de la variable dont l'effectif est maximum.*

Introduisons maintenant les notations dont nous aurons besoin pour définir le paramètre de position suivant : **la moyenne**.

13.2.2. La moyenne

Le tableau des effectifs fournit les effectifs partiels n_j. Nous disposons donc des couples $(x_j; n_j)$ où j varie de 1 à p.

Dans le cas d'une variable continue, le nombre des classes est encore noté p. Nous avons convenu d'attribuer globalement l'effectif d'une classe au centre c_j de cette classe.

Définition 13.2.2. *Dans le cas d'une variable continue,* **la moyenne de la série statistique** *composée des couples* (c_j, n_j) *est définie par :*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\left(c_j \times n_j\right), \tag{13.2.1}$$

où n *représente l'effectif total de la série statistique et* p *le nombre de classes de la série statistique.*

Définition 13.2.3. *Dans le cas d'une variable discrète,* **la moyenne de la série statistique** *composée des couples* (x_j, n_j) *est définie par :*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\left(x_j \times n_j\right), \tag{13.2.2}$$

où n *représente l'effectif total de la série statistique et* p *le nombre de classes de la série statistique.*

13.3. Paramètres de dispersion

13.3.1. L'étendue

Dans ce paragraphe, nous énoncerons les définitions de trois paramètres de dispersion. Nous ne sommes pas exhaustifs. Simplement nous rappelons les définitions de ceux qui seront les plus utilisés dans ce cours.

Définition 13.3.1. L'étendue d'une série statistique *est la différence entre la plus petite et la plus grande des valeurs du caractère.*

13.3.2. La variance

Définition 13.3.2. La variance d'une série statistique *est la moyenne des carrés des écarts des valeurs du caractère* x *à la moyenne de la série statistique :*

$$\sigma^2 = Var(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} n_j(x_j - \overline{x})^2, \tag{13.3.1}$$

x_j *étant remplacé par* c_j *dans le cas d'une variable continue,* N *l'effectif total de la série statistique et* p *le nombre de classes de la série statistique.*

13.3.3. L'écart-type

Définition 13.3.3. L'écart-type d'une série statistique *est la racine carrée de la variance de cette série statistique :*

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}. \tag{13.3.2}$$

Remarque : Ce paramètre de dispersion est beaucoup plus intéressant que **la variance** car il a l'intérêt de s'exprimer dans la même unité de mesure que la moyenne. Ainsi nous pouvons comparer des échantillons entre eux.

13.4. La théorie de l'estimation

13.4.1. Introduction

Une fois ces quelques définitions rappelées, nous pouvons aborder une des questions majeures en statistique :

l'estimation.

Le problème de **l'estimation** est l'impossibilité de connaître exactement la valeur d'un **paramètre inconnu** noté θ. Ce problème est très général et a des aspects distincts.
Les observations permettent de construire une estimation de θ.

Ainsi chaque observation est la valeur d'une variable aléatoire (v.a.) X dont la loi dépend de θ.

Cela revient à doter l'*état de la nature* inconnu d'un **modèle probabiliste**.

Ce dernier est complété par un **modèle d'échantillonnage** décrivant la manière dont les observations sont recueillies.
Nous nous plaçons dans le cas le plus simple : les n observations constituent un **échantillon aléatoire simple** (EAS) composé de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) $\{X_1, \cdots, X_n\}$.

Signalons qu'un modèle probabiliste complété par un modèle d'échantillonnage est appelé un **modèle statistique**.
Le problème s'énonce ainsi :

comment pouvons-nous estimer θ à partir d'un $n-$échantillon aléatoire simple $\{X_1, \ldots, X_n\}$ dont les valeurs observées sont notées $\{x_1, \ldots, x_n\}$?

Cette question recouvre **deux problèmes** :
- définir un estimateur possédant de bonnes qualités ou encore de bonnes propriétés statistiques
- trouver la manière adéquate de le choisir.

13.4.2. Quelques définitions

Soient :
- θ un paramètre réel inconnu défini au sein d'une population U
- Θ l'ensemble des valeurs possibles de θ.

Définition 13.4.1. *Si* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *est un échantillon aléatoire simple d'effectif* n *prélevé dans* U*, alors nous appelons* **estimateur** *de* θ *toute fonction des observations, notée* $\widehat{\theta}$ *:*

$$\widehat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n). \tag{13.4.1}$$

Nous nous restreignons à des valeurs $\widehat{\theta} \in \Theta$*.* $\widehat{\theta}$ *est une variable aléatoire de loi de probabilité qui dépend du paramètre inconnu* θ*.*

Définition 13.4.2. *Nous appelons* **estimation** *de* θ *une valeur* $h(x_1, \ldots, x_n)$ *d'un estimateur* $\widehat{\theta}$ *calculée à partir de* n *valeurs observées* $x_1, \ldots, x_n$ *dans un échantillon prélevé dans la population* U*.*

Il est souhaitable de ne pas utiliser uniquement le bon sens ou l'intuition pour choisir entre deux estimateurs.

Pour pouvoir effectuer le bon choix, nous devons pouvoir les comparer en recourant à des objectifs choisis a priori.

Nous allons établir une liste de plusieurs propriétés que nous souhaitons retrouver dans un bon estimateur, permettant ainsi de mettre en évidence ceux qui en possèdent sinon le plus grand nombre, du moins les plus importantes.

13.4.3. Simplification de notation

Toute fonction des observations d'un échantillon aléatoire simple, définie par (13.4.1), peut permettre d'estimer la valeur de θ. Nous avons appelé **estimation** la valeur observée $h(x_1, \ldots, x_n)$ de l'**estimateur** $h(X_1, \ldots, X_n)$.

La notation utilisée « majuscule pour une variable aléatoire et minuscule pour sa valeur » est en contradiction avec (13.4.1) et veut que nous distinguions aussi la variable aléatoire $\widehat{\theta}$ de sa valeur observée.

13.4.4. Propriétés d'un estimateur

Le choix d'un estimateur va reposer sur ses qualités. Comme nous l'avons souligné, il est habituel de comparer des estimateurs entre eux sur la base de propriétés plus ou moins intéressantes qu'ils possèdent ou non.

La première concerne la possibilité de comporter un **biais**. Il est souvent judicieux que la distribution d'un estimateur soit centrée sur le paramètre inconnu, c'est-à-dire qu'il possède la propriété suivante.

Propriété 13.4.1. $\widehat{\theta}$ *est un* **estimateur sans biais** *(ou non biaisé) du paramètre* θ *si*

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] = \theta. \tag{13.4.2}$$

Définition 13.4.3. *Si la relation* (13.4.2) *n'est pas satisfaite, le* **biais** *de* $\widehat{\theta}$ *est alors défini par*

$$B\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] - \theta. \tag{13.4.3}$$

Remarque 13.4.1. Pour aborder le caractère biaisé ou non d'un estimateur il faudra utiliser des propriétés de l'espérance mathématique étudiée dans les années précédentes.

13.4.5. Précision : Cas d'un estimateur sans biais

Comme nous l'avons vu auparavant, la variance d'un estimateur joue un rôle important dans la mesure de précision.

Propriété 13.4.2. *Si* $\widehat{\theta}$ *est un estimateur sans biais du paramètre* θ, *nous utilisons comme mesure de précision sa variance* $Var\left[\widehat{\theta}\right]$.

Plus $Var\left[\widehat{\theta}\right]$ est petite, plus l'estimateur $\widehat{\theta}$ est précis. Entre deux estimateurs non biaisés, nous choisirons le plus précis des deux, c'est-à-dire celui de plus petite variance.

Exemple 13.4.1. Soit un échantillon aléatoire simple de taille relativement élevée, prélevé dans une population normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Si $\overline{X}$ (moyenne de l'échantillon) et $X_{1/2}$ (médiane de l'échantillon) alors, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mu, \quad Var\left[\overline{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{13.4.4}$$

et

$$\mathbb{E}[X_{1/2}] = \mu, \quad Var[X_{1/2}] = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n}. \tag{13.4.5}$$

Nous avons donc $Var[\overline{X}] < Var[X_{1/2}]$. Donc $\overline{X}$ est un estimateur plus précis que $X_{1/2}$ dans ce cas présent.

13.4.6. Précision : Cas d'un estimateur quelconque

Propriété 13.4.3. *Si* $\widehat{\theta}$ *est un estimateur du paramètre* θ, *nous mesurons la précision de l'estimateur* $\widehat{\theta}$ *par l'***écart quadratique moyen** *(EQM) :*

$$EQM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left[\widehat{\theta}\right] + B\left(\widehat{\theta}\right)^2. \tag{13.4.6}$$

Si $\widehat{\theta}$ *est un estimateur sans biais du paramètre* θ, *ce qui se traduit par*

$$B\left(\widehat{\theta}\right) = 0, \tag{13.4.7}$$

alors nous retrouvons la propriété précédente.

Entre deux estimateurs de θ, nous choisissons celui dont l'écart quadratique moyen est le plus faible.

13.5. Des exemples d'estimation

13.5.1. Estimation de la moyenne d'une population

Pour estimer la moyenne μ d'une population de taille N nous utilisons la moyenne $\overline{X}$ d'un échantillon de taille n $(n < N)$ du type PEAR (probabilités égales avec remise).

Rappel : En tant que variable aléatoire, $\overline{X}$ constitue un **estimateur** de la moyenne μ.

Définition 13.5.1. *Toute valeur observée de $\overline{X}$ à partir d'un échantillon est appelée une* **estimation** *de la moyenne μ.*

Le mode de prélèvement retenu nous assure que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et sont telles que, pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu \tag{13.5.1}$$

et

$$Var[X_i] = \sigma^2. \tag{13.5.2}$$

Soit $\overline{X}$ définie par

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{13.5.3}$$

la moyenne d'un échantillon aléatoire simple prélevé dans une population de moyenne μ.

Calculons l'espérance de $\overline{X}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n} \times \mu \times n = \mu.\end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi le résultat suivant :

Théorème 13.5.1. *En moyenne, l'estimateur $\overline{X}$ est égal à la moyenne μ, ou encore $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de la moyenne μ.*

En général en statistique, nous calculons l'espérance et la variance d'une variable aléatoire. Donc nous allons calculer maintenant la variance.
Calculons la variance de $\overline{x}$:

$$\begin{aligned}Var[\overline{X}] &= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i], \quad \text{car les v.a. sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2, \quad \text{car les v.a. sont de même variance} \\ &= \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

La question : Que signifie statistiquement ce dernier résultat ? Comment le statisticien l'interprète-t-il ?

La réponse : Ce paramètre, destiné à connaître la dispersion des valeurs de $\overline{x}$ autour de la moyenne μ, permet de mesurer **l'erreur d'échantillonnage**. Plus $Var[\overline{X}]$ est faible, plus il est probable que l'erreur sera petite et l'estimateur précis. $Var[\overline{X}]$ est faible si la variance σ^2 de la population est petite, ce qui correspond à une population homogène, et/ou si n est grand, c'est-à-dire si la taille de l'échantillon est grande.

Remarque 13.5.1. Cette erreur ne dépend pas de la taille N de la population, ce qui n'est pas intuitif !

13.5.2. Estimation de la variance d'une population

Soit S^2_{nc} définie par

$$S^2_{nc} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \tag{13.5.4}$$

la variance d'un échantillon aléatoire simple prélevé dans une population U de variance σ^2.
Calculons l'espérance afin de savoir si S^2_{nc} est un estimateur sans biais de σ^2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2_{nc}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - \overline{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_i X_i^2\right] - \mathbb{E}\left[\overline{X}^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_i\left(Var[X_i] + \mu^2\right) - \left(Var[\overline{X}] + \mu^2\right) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 \\
&= \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Nous constatons ainsi que

$$\mathbb{E}[S^2_{nc}] \neq \sigma^2. \tag{13.5.5}$$

Théorème : S^2_{nc} est un estimateur biaisé de la variance σ^2 dont le biais vaut :

$$B(S^2_{nc}) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}. \tag{13.5.6}$$

Remarque : $B(S^2_{nc})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous disons dans ce cas que S^2_{nc} est un **estimateur asymptotiquement sans biais**.
À partir de cette remarque, nous construisons un autre estimateur de la variance σ^2, que nous appelons la **variance corrigée** de l'échantillon aléatoire simple défini par :

Définition 13.5.2.

$$S_c^2 = \frac{n}{n-1} S_{nc}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X})^2. \tag{13.5.7}$$

Nous vérifions aisément que

$$\mathbb{E}[S_c^2] = \sigma^2. \tag{13.5.8}$$

Donc nous pouvons établir le résultat suivant :

Théorème 13.5.2. *La variance corrigée S_c^2 est un estimateur sans biais de la variance σ^2.*

13.5.3. Estimation d'une proportion d'une population

Si π_A est une proportion d'individus qui possèdent une caractéristique A dans une population U, nous pouvons estimer ce paramètre par la proportion observée dans un échantillon aléatoire simple de taille n prélevé dans cette population U :

$$\widehat{\pi_A} = \frac{n_A}{n} \tag{13.5.9}$$

où n_A est le nombre d'individus de l'échantillon qui possèdent une caractéristique A.
π_A peut-être considérée comme la moyenne d'une loi de Bernoulli en dotant tous les individus de la population d'une valeur 1 ou 0 selon qu'ils possèdent ou non la caractéristique A :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\text{Somme des valeurs 1 + Somme des valeurs 0}}{\text{Taille de la population}} \\ &= \frac{\text{Nombre de 1}}{\text{Taille de la population}} \\ &= \text{Proportion de 1} \\ &= \pi_A. \end{aligned}$$

Si nous considérons la moyenne $\overline{x}$ de l'échantillon composé de 1 et de 0 :

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\text{Somme des 1 observés + Somme des 0 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{\text{Nombre de 1 observés}}{\text{Taille de l'échantillon}} \\ &= \frac{n_A}{n}. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[\overline{X}] = \mu$, nous en déduisons que

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{n_A}{n}\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{\pi}_A\right] = \mu = \pi_A. \tag{13.5.10}$$

Par conséquent, $\widehat{\pi}_A$ est un estimateur sans biais de de π_A.

Bibliographie

[Cha73] P. Chapouille. *Planification et analyse des expériences.* Masson, Paris, 1973.

[Dag98a] P. Dagnélie. *Statistique Théorique et Appliquée*, volume 1. De Boeck & Larcier, Bruxelles, 1998.

[Dag98b] P. Dagnélie. *Statistique Théorique et Appliquée*, volume 2. De Boeck & Larcier, Bruxelles, 1998.

[DBBP97] G. Demengel, P. Bénichou, N. Boy, and J.-P. Pouget. *Probabilités, Statistique inférentielle, Fiabilité, Outils pour l'ingénieur.* Ellipses, 1997.

[Dro01] J.J. Droesbeke. *Éléments de Statistique.* Université de Bruxelles, Bruxelles, 4ème édition edition, 2001.

[Fal05] B. Falissard. *Comprendre et utiliser les statistiques dans les sciences de la vie.* Abrégés. Masson, Paris, $3^{\text{ème}}$ edition, 2005.

[Fle86] J.L. Fleiss. *The Design and Analysis of Clinical Experiments.* John Wiley, New-York, 1986.

[HPer] F. Husson and J. Pagès. *Statistiques générales pour utilisateurs.* PUR, Rennes, a trouver.

[KRB96] S. Kotz, C.B. Read, and N. Balakrishnan, editors. *Encyclopædia Of Statistical Sciences.* Wiley-Interscience, 2nd edition, 1996.

[Par74] G. Parreins. *Techniques Statistiques : moyens rationnels de choix et de décision.* Dunod technique, Paris, 1974.

[Phi82] G. Philippeau. *Théorie des plans d'expérience.* ICTF, Paris, 1982.

[Ric89] W.R. Rice. Analysing tables of statistical tests. *Evolution*, 43(1) :223–225, 1989.

[SA00] H. Sahai and M.I. Ageel. *The Analysis of Variance : Fixed, Random and Mixed Models.* Birkhäuser, Boston, 2000.