Corrigé de l'examen partiel de Statistique Approfondie I

Tous les tests seront réalisés au seuil $\alpha = 5$ %.

Les deux exercices sont indépendants.

Durée de l'épreuve : 1h15.

Le premier exercice est issu du livre « Techniques Statistiques » de Georges Parreins. Le second exercice provient du livre de B. Falissard « Comprendre et utiliser les statistiques dans les sciences du vivant ».

Exercice 1 Carburateurs

On veut tester quatre types de carburateurs : A_1, A_2, A_3 et A_4. Pour chaque type de carburateur on dispose de six pièces que l'on monte sucessivement en parallèle sur quatre voitures que l'on suppose avoir des caractéristiques parfaitement identiques. Le tableau ci-dessous indique pour chacun des eassais la valeur d'un paramètre lié à la consommation :

Essai	A_1	A_2	A_3	A_4
1	21	23	18	20
2	24	23	19	21
3	25	32	28	25
4	20	23	19	15
5	34	32	24	29
6	17	15	14	9

Partie I :

Dans cette partie **on ne tient pas compte** de la possible influence de l'ordre dans lequel les essais ont été effectués.

a) La variable à expliquer, *Consommation*, est une variable continue. La variable explicative que l'on considère, le type de carburateur, *Carburateur*, est qualitative et contrôlée. Le plan qui a été utilisé pour réaliser l'expérience comporte des répétitions, on peut donc essayer de se servir d'un modèle d'analyse de la variance à un facteur contrôlé.

On introduit le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1\dots4,\ j = 1\dots6,$$
$$\text{avec la contrainte supplémentaire } \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0,$$

où $Y_{i,j}$ est la consommation de la voiture équipée du carburateur i lors du $j-$ème essai. On postule les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 6,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leq i,k \leq 4, \text{ et } 1 \leq j,l \leq 6.$$

Ce modèle comporte 6 répétitions pour chaque niveau du facteur. Il s'agit donc d'un plan expérimental équilibré.

b) On commence par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question a) sont bien vérifiées. Pour cela on calcule les résidus du modèle.

1. Le protocole expérimental indique que l'on peut faire comme si chacun des 24 carburateurs utilisés au cours de l'expérience a été monté sur une même voiture. On suppose négligeable la dégradation des véhicules suite à leur utilisation répétée au cours de l'expérience. Ces considérations nous permettent de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j}$ sont indépendantes.
2. On effectue un test d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Puisque l'on ne connaît pas la loi des erreurs, on fait un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur
Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,194
P :                   0,899
```

Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et l'on ne peut rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, il n'y a pas de différences significatives entre les variances des erreurs.

3. On s'intéresse désormais à la normalité des erreurs. On cherche s'il l'on peut faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

On utilise alors le test de Ryan-Joiner :

```
W-test pour la normalité
R:                              0,9868
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil de notre test. On en déduit que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5$ % et que l'on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5$ %.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejétée à la question 3., on s'intéresse à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur
Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 0,650
P :                   0,885
```

Le test n'est pas significatif car $0,885$ est strictement supérieur à $\alpha = 5$ %. On ne peut rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil $\alpha = 5$ %.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à un facteur sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Carburateur* a un effet sur la *Consommation*. On teste donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

On consulte alors le tableau de l'analyse de la variance

```
Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Carburat     fixe       4  A1 A2 A3 A4

Analyse de la variance pour Consomma, en utilisant la SC
ajustée pour les tests

Source      DL      SC séq   SC ajust   CM ajust        F       P
Carburat     3      100,83     100,83      33,61     0,89   0,464
Erreur      20      757,00     757,00      37,85
Total       23      857,83
```

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est de $0,464$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5$ % : le test n'est pas significatif à ce seuil. On ne peut rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur $Carburateur$ sur la $Consommation$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur $Carburateur$ n'a pas d'effet significatif sur la $Consommation$. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de deuxième espèce, il convient donc de calculer la puissance du test. À l'aide de l'entrée **ANOVA à un facteur contrôlé** du sous menu **Puissance et effectif de l'échantillon** du menu **Stat** de Minitab, on obtient le résultat suivant :

```
Puissance et effectif de l'échantillon

ANOVA à un facteur contrôlé

Sigma = 6,152  Alpha = 0,05  Nombre de niveaux = 4

               Effectif de             Différence
Moyennes SC  l'échantillon  Puissance  maximale
    11,6838              6     0,1555  4,834
```

La *Différence maximale* correspond à l'écart le plus important en valeur absolue entre les estimations des différents niveaux du facteur. Ici c'est la valeur de $\widehat{A_4} - \widehat{A_2} = 4,834$ qui est la plus élevée. La puissance a posteriori est donc très faible : 0,1555 par rapport à la valeur de $0,80$ qui est considérée comme étant acceptable. On aurait pu améliorer la puissance du test en augmentant le nombre de répétitions.

```
Puissance et effectif de l'échantillon

ANOVA à un facteur contrôlé

Sigma = 6,152  Alpha = 0,05  Nombre de niveaux = 4

               Effectif de  Puissance  Puissance  Différence
Moyennes SC  l'échantillon      cible     réelle  maximale
    11,6838             37     0,8000     0,8084  4,834
```

On constate qu'il aurait fallu 37 répétitions, donc 148 carburateurs, pour obtenir une puissance d'au moins 0,80. On aurait multiplié par plus de six l'ampleur de l'étude qui a été réalisée...
Les estimations des coefficients du modèle sont :

```
Terme          Coef      Er-T coef        T      P
Constante    22,083          1,256    17,58  0,000
Carburat
A1            1,417          2,175     0,65  0,522
A2            2,583          2,175     1,19  0,249
A3           -1,750          2,175    -0,80  0,431
```

On en déduit que :

$$\widehat{\mu} = 22,083, \quad \widehat{\alpha_1} = 1,417, \quad \widehat{\alpha_2} = 2,583, \quad \widehat{\alpha_3} = -1,750, \quad \widehat{\alpha_4} = -2,250,$$

en utilisant la relation $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i} = 0$.
On remarque que c'est le carburateur A_4 qui fait consommer le moins de carburant. Toutefois, puisque l'on n'a pas pu rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* au seuil $\alpha = 5$ %, ce comportement n'est pas significativement différent des autres au seuil $\alpha = 5$ %.
Au seuil $\alpha = 5$ %, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* n'a pu être réfutée, **on de doit donc pas faire de comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Carburateur*.

Partie II :
Après avoir effectué l'analyse de la première partie on apprend que tous les essais numéro 1 ont été réalisé un lundi, tous les essais numéro 2 un mardi, ..., tous les essais numéro 6 un samedi.
On décide donc dans cette partie **de tenir compte** de la possible influence de l'ordre de réalisation des essais, c'est-à-dire du facteur *Essai*.

a) La variable à expliquer, *Consommation*, est une variable continue. Les variables explicatives que l'on considère, le type de carburateur, *Carburateur*, et le jour de l'essai, *Essai*, sont qualitatives et contrôlées. Le plan qui a été utilisé pour réaliser l'expérience ne comporte pas de répétitions, on peut donc essayer de se servir d'un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés sans répétition.
   On introduit le modèle :

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{i,j}, \quad i = 1 \ldots 4, \ j = 1 \ldots 6,$$
$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{6} \beta_j = 0,$$

   où $Y_{i,j}$ est la consommation de la voiture équipée du carburateur i lors du $j-$ème essai. On postule les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j), 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 6,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j}, \epsilon_{k,l}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \text{ avec } 1 \leq i,k \leq 4 \text{ et } 1 \leq j,l \leq 6.$$

   Ce modèle ne comporte aucune répétition pour aucun des niveaux du facteur. Il s'agit d'un plan expérimental équilibré.

b) On commence par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question a) sont bien vérifiées. Pour cela on calcule les résidus du modèle.

   1. Le protocole expérimental indique que l'on peut faire comme si chacun des 24 carburateurs utilisés au cours de l'expérience a été monté sur une même voiture. On suppose négligeable la dégradation des véhicules suite à leur utilisation répétée au cours de l'expérience. Ces considérations nous permettent de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j}$ sont indépendantes.

2. Il n'est pas possible de tester l'hypothèse d'égalite des variances des erreurs $\mathcal{H}_0$ ci-dessous à l'aide des données expérimentales dont on dispose puisque le plan utilisé ne comporte pas de répétitions.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1} = \ldots = \sigma^2_{4,1} = \ldots = \sigma^2_{1,6} = \ldots = \sigma^2_{4,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Par contre on sait que si l'hypothèse nulle globale $\mathcal{H}_0$ ci-dessus est vérifiée, alors chacune des deux hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Carburateur* et $\mathcal{H}_0^{''}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur *Essai* doivent l'être également. On effectue deux tests d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma^2_{c,1} = \sigma^2_{c,2} = \sigma^2_{c,3} = \sigma^2_{c,4}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Carburateur.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_{e,1} = \sigma^2_{e,2} = \sigma^2_{e,3} = \sigma^2_{e,4} = \sigma^2_{e,5} = \sigma^2_{e,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Essai.}$$

Puisque l'on ne connaît pas la loi des erreurs, on fait utilise un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,842
P :                   0,487

Test de l'égalité des variances
Facteurs    Essai

Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

Statistique du test : 0,925
P :                   0,488
```

Puisque les $p-$valeurs des tests sont strictement supérieures au seuil $\alpha = 5$ %, les tests sont non significatifs et l'on ne peut rejeter les hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ et $\mathcal{H}_0^{''}$.

3. On s'intéresse désormais à la normalité des erreurs. On cherche s'il l'on peut faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

On utilise alors le test de Ryan-Joiner :

```
W-test pour la normalité
R:                                0,9725
Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
```

Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil de notre test. On en déduit que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5$ % et que l'on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5$ %.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejétée à la question 3., on s'intéresse à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.
Pour les mêmes raisons qu'au 2., il n'est pas possible de tester l'hypothèse d'égalite des variances des erreurs $\mathcal{H}_0$:

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1} = \ldots = \sigma^2_{4,1} = \ldots = \sigma^2_{1,6} = \ldots = \sigma^2_{4,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

On s'intéresse aux deux hypothèses nulles $\mathcal{H}_0^{'}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur $Carburateur$ et $\mathcal{H}_0^{''}$ d'homogénéité des variances des erreurs par rapport au facteur $Essai$. On effectue deux tests d'homogénéité des variances des erreurs :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \sigma^2_{c,1} = \sigma^2_{c,2} = \sigma^2_{c,3} = \sigma^2_{c,4}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Carburateur.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \sigma^2_{e,1} = \sigma^2_{e,2} = \sigma^2_{e,3} = \sigma^2_{e,4} = \sigma^2_{e,5} = \sigma^2_{e,6}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe une variance différente des autres pour } Essai.}$$

Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Carburateur

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 1,930
P :                   0,587
```

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Essai

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 3,525
P :                   0,620
```

Puisque les $p-$valeurs des tests sont strictement supérieures au seuil $\alpha =$ 5 %, les tests sont non significatifs et l'on ne peut rejeter les hypothèses nulles $\mathcal{H}_0'$ et $\mathcal{H}_0''$.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés sans répétition sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Carburateur* ou le facteur *Essai* a un effet sur la *Consommation*. On teste donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1' : \text{Il existe } i_0 \in \{1,2,3,4\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0'' : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1'' : \text{Il existe } j_0 \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

On consulte alors le tableau de l'analyse de la variance

Facteur	Type	Niveaux	Valeurs
Carburat	fixe	4	A1 A2 A3 A4
Essai	fixe	6	1 2 3 4 5 6

Analyse de la variance pour Consomma, en utilisant la SC ajustée pour les tests

Source	DL	SC séq	SC ajust	CM ajust	F	P
Carburat	3	100,833	100,833	33,611	5,99	0,007
Essai	5	672,833	672,833	134,567	23,98	0,000
Erreur	15	84,167	84,167	5,611		
Total	23	857,833				

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est de $0,007$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. On doit rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ d'existence d'un effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation*. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Carburateur* a un effet significatif sur la *Consommation*. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.
La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est de $0,000$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. On doit rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur *Essai* sur la *Consommation* et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ d'existence d'un effet du facteur *Essai* sur la *Consommation*. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur *Essai* a un effet significatif sur la *Consommation*. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.
On constate que, contrairement à ce que l'on avait pu montrer dans la partie I, on arrive à mettre en évidence un effet du facteur *Carburateur* sur la consommation. Il semblait nécessaire de prendre en compte ce facteur supplémentaire, *Essai*, à la vue des boîtes à moustaches qui étaient reproduites dans l'énoncé. La variabilité importante associée au jour où l'essai a été réalisé, liée par exemple à la densité du traffic automobile, masquait les variations liées au facteur *Carburateur*.
Les estimations des coefficients du modèle sont :

Terme	Coef	Er-T coef	T	P
Constante	22,0833	0,4835	45,67	0,000
Carburat				
A1	1,4167	0,8375	1,69	0,111
A2	2,5833	0,8375	3,08	0,008
A3	-1,7500	0,8375	-2,09	0,054
Essai				
1	-1,583	1,081	-1,46	0,164
2	-0,333	1,081	-0,31	0,762
3	5,417	1,081	5,01	0,000
4	-2,833	1,081	-2,62	0,019
5	7,667	1,081	7,09	0,000

On en déduit que :

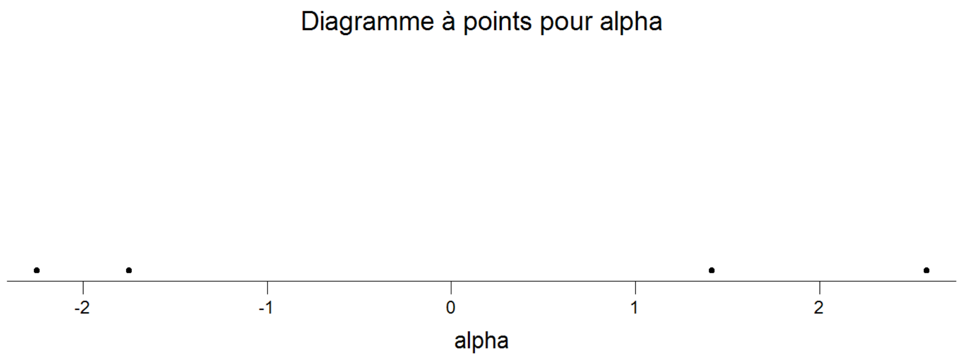
$$\widehat{\mu} = 22,083, \quad \widehat{\alpha_1} = 1,417, \quad \widehat{\alpha_2} = 2,583, \quad \widehat{\alpha_3} = -1,750, \quad \widehat{\alpha_4} = -2,250,$$
$$\widehat{\beta_1} = -1,583, \quad \widehat{\beta_2} = -0,333, \quad \widehat{\beta_3} = 5,417, \quad \widehat{\beta_4} = -2,833, \quad \widehat{\beta_5} = 7,667,$$
$$\widehat{\beta_6} = -8,335,$$

en utilisant les relations $\sum_{i=1}^{4} \widehat{\alpha_i} = 0$ et $\sum_{j=1}^{6} \widehat{\beta_j} = 0$.
On remarque que les estimations des coefficients associés aux carburateurs

sont les mêmes que celles obtenues à la partie I. Il en va toujours de même lorsque le plan est équilibré.
Au seuil $\alpha = 5$ %, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'$ d'absence d'effet du facteur *Carburateur* sur la *Consommation* a été rejetée, **on peut donc faire des comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Carburateur*.

```
Tests de simultanéité de Tukey
Variable de réponse Consomma
Toutes comparaisons deux à deux entre niveaux de Carburat

Carburat = A1 soustraites de :

Niveau           Différence         Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A2                    1,167           1,368      0,853           0,8284
A3                   -3,167           1,368     -2,315           0,1385
A4                   -3,667           1,368     -2,681           0,0726

Carburat = A2 soustraites de :

Niveau           Différence         Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A3                   -4,333           1,368     -3,169           0,0290
A4                   -4,833           1,368     -3,534           0,0142

Carburat = A3 soustraites de :

Niveau           Différence         Er-T de     Valeur   Valeur ajustée
Carburat       des moyennes   la différence       de T             de P
A4                  -0,5000           1,368    -0,3656           0,9827
```

Ainsi au seuil global de décision $\alpha_{global} = 5$ % les niveaux A_2 et A_3, A_2 et A_4 sont significativement différents, pour les autres l'hypothèse d'égalité ne peut être rejetée.
On a représenté, dans l'ordre de gauche à droite sur la figure, les estimations des valeurs des niveaux A_3, A_1, A_4, A_2 du facteur *Carburateur*.



Au seuil $\alpha = 5$ %, l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0''$ d'absence d'effet du facteur *Essai* sur la *Consommation* a été rejetée, **on peut donc faire des comparaisons multiples** de l'effet des différents niveaux du facteur *Essai*.

```
Tests de simultanéité de Tukey
Variable de réponse Consomma
Toutes comparaisons deux à deux entre niveaux de Essai

Essai = 1 soustraites de :
```

Niveau Essai	Différence des moyennes	Er-T de la différence	Valeur de T	Valeur ajustée de P
2	1,250	1,675	0,746	0,9725
3	7,000	1,675	4,179	0,0086
4	-1,250	1,675	-0,746	0,9725
5	9,250	1,675	5,522	0,0007
6	-6,750	1,675	-4,030	0,0114

```
Essai = 2 soustraites de :
```

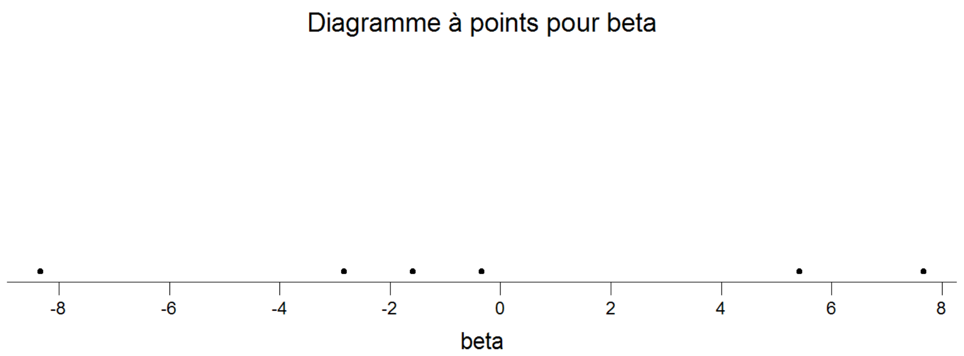
Niveau Essai	Différence des moyennes	Er-T de la différence	Valeur de T	Valeur ajustée de P
3	5,750	1,675	3,433	0,0355
4	-2,500	1,675	-1,493	0,6738
5	8,000	1,675	4,776	0,0027
6	-8,000	1,675	-4,776	0,0027

```
Essai = 3 soustraites de :
```

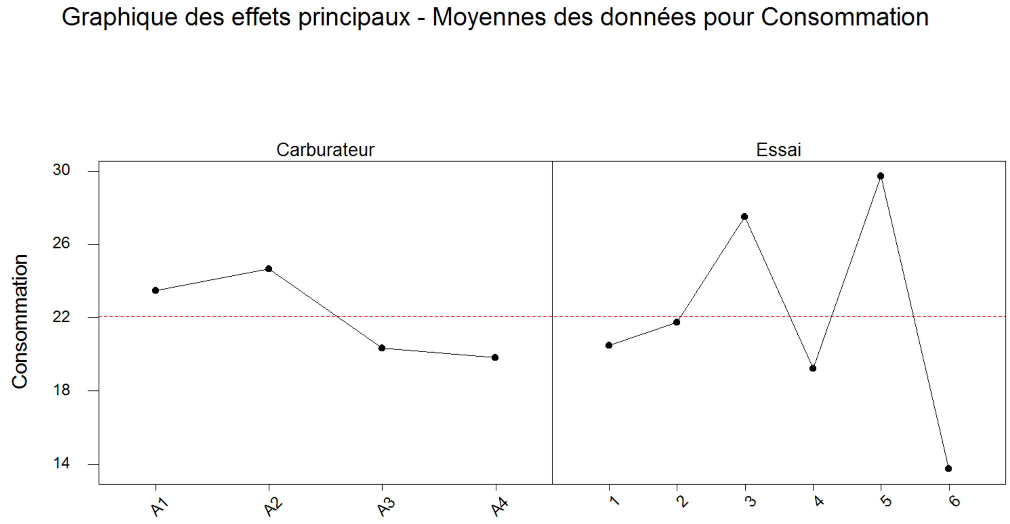
Niveau Essai	Différence des moyennes	Er-T de la différence	Valeur de T	Valeur ajustée de P
4	-8,25	1,675	-4,925	0,0021
5	2,25	1,675	1,343	0,7578
6	-13,75	1,675	-8,209	0,0000

```
Essai = 4 soustraites de :

Niveau       Différence          Er-T de      Valeur   Valeur ajustée
Essai      des moyennes   la différence        de T             de P
5                10,500           1,675       6,269           0,0002
6                -5,500           1,675      -3,284           0,0469

Essai = 5 soustraites de :

Niveau       Différence          Er-T de      Valeur   Valeur ajustée
Essai      des moyennes   la différence        de T             de P
6                -16,00           1,675      -9,552           0,0000
```

Ainsi au seuil global de décision $\alpha_{global} = 5$ % les niveaux 1 et 3, 1 et 5, 2 et 3, 2 et 5, 2 et 6, 3 et 4, 3 et 6, 4 et 5, 5 et 6 sont significativement différents, pour les autres l'hypothèse d'égalité ne peut être rejetée.
On a représenté, dans l'ordre de gauche à droite sur la figure, les estimations des valeurs des niveaux 4, 1, 2, 3, 5, 6 du facteur *Essai*.



À l'aide de l'entrée **Graphique des effets principaux** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab, on obtient la représentation graphique pertinente suivante :



La ligne en pointillé en rouge[1] est la valeur de l'estimation de la moyenne $\widehat{\mu}$. Les $\widehat{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq 4$, et les $\widehat{\beta_j}$, $1 \leq j \leq 6$, sont représentées par les valeurs des écarts à cette ligne.

Exercice 2 Rats et régimes

On teste l'influence de différents régimes alimentaires sur des rats de laboratoire.

Le gain de poids des rats est désigné par la variable $Poids$[2], exprimée en grammes, les deux facteurs sont les variables $Calorie$ et $Vitamine$. La variable $Calorie$ vaut 1 si les rats n'ont pas suivi un régime hypercalorique et 2 s'ils ont suivi un tel régime hypercalorique. La variable $Vitamine$ vaut 1 si les rats n'ont pas reçu de compléments vitaminés et 2 s'ils ont reçu de tels compléments.

[1] En gris si vous lisez une version imprimée de ce corrigé.

[2] On a ici reproduit les données sans modifier le nom des variables qui ont été étudiées. Le nom correct pour le gain de $Poids$ serait le gain de $Masse$ car le poids est une force donc exprimée en Newton et non en multiple du gramme. Il s'agit d'un abus de langage courant mais à éviter.

Calorie	Vitamine	Poids	Calorie	Vitamine	Poids
1	1	84	1	1	66
1	2	62	1	2	59
2	1	87	2	1	89
2	2	103	2	2	90
1	1	66	1	1	56
1	2	84	1	2	74
2	1	92	2	1	101
2	2	107	2	2	116
1	1	82	1	1	79
1	2	73	1	2	74
2	1	77	2	1	95
2	2	95	2	2	112
1	1	62	1	1	89
1	2	75	1	2	74
2	1	88	2	1	91
2	2	96	2	2	92

1. La réponse observée, le gain de *Poids* exprimé en grammes, est considérée comme une variable quantitative. Le premier des deux facteurs, absence ou présence de compléments vitaminés, noté *Vitamine*, est qualitatif. Le second des deux facteurs, le type de régime suivi, hypocalorique ou non, noté *Calorie*, est également qualitatif. Le plan d'expérience comporte huit répétitions on peut de ce fait utiliser deux modèles d'analyse de la variance à deux facteurs, l'un ne comportant pas d'interaction entre les deux facteurs *Vitamine* et *Calorie*, l'autre comportant cette interaction. Le modèle le plus complet parmi ces deux possibilités est celui de l'analyse de la variance avec répétitions et terme d'interaction. On décide de le retenir pour la suite de l'étude.
On introduit le modèle :

$$Y_{i,j,k} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \epsilon_{i,j,k}, \quad i = 1\ldots 2,\ j = 1\ldots 2,\ k = 1\ldots 8$$

$$\text{avec les contraintes supplémentaires } \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \gamma_{i,j} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, 2\} \text{ et } \sum_{i=j}^{2} \gamma_{i,j} = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, 2\}$$

où $Y_{i,j,k}$ est est le gain de poids dans la condition i du facteur *Vitamine* et dans la condition j du facteur *Calorie* lors de la $k-$ème répétition. On postule les hypothèses classiques suivantes pour les erreurs :

$$\forall\ (i,j,k), 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 2,\ 1 \leq k \leq 8,\ \mathcal{L}(\epsilon_{i,j,k}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
$$\text{et } \mathrm{Cov}(\epsilon_{i,j,k}, \epsilon_{l,m,n}) = 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (l,m,n) \text{ avec}$$
$$1 \leq i,k \leq 2,\ 1 \leq j,l \leq 2 \text{ et } 1 \leq m,n \leq 8.$$

2. On commence par vérifier que les conditions d'utilisation du modèle introduit à la question 1. sont bien vérifiées. Pour cela on calcule les résidus du modèle.

   1. Le protocole expérimental indique que l'expérience a bien porté sur 32 rats différents et que l'on n'est pas en présence de mesures qui seraient répétées sur un ou des mêmes individus. Ceci nous permet de supposer que les erreurs $\epsilon_{i,j,k}$ sont indépendantes.
   2. Le plan d'expérience utilisé comporte des répétitions ce qui permet de tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ d'égalite des variances des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$:

   $$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1,1} = \sigma^2_{2,1,1} = \sigma^2_{1,2,1} = \sigma^2_{2,2,1} = \cdots = \sigma^2_{1,1,8} = \sigma^2_{2,1,8} = \sigma^2_{1,2,8} = \sigma^2_{2,2,8}}$$

   contre

   $$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

   Puisque l'on ne connaît pas la loi des erreurs, on fait utilise un test non-paramétrique, celui de Levene, sur les résidus du modèle :

   ```
   Test de l'égalité des variances
   Facteurs    Calorie  Vitamine

   Test de Levene (pour toute loi de probabilité continue)

   Statistique du test : 2,347
   P :                   0,094
   ```

   Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et l'on ne peut rejeter l'hypothèses nulle $\mathcal{H}_0$ d'homoscédasticité.
   3. On s'intéresse désormais à la normalité des erreurs. On cherche s'il l'on peut faire l'hypothèse que les résidus sont des réalisations d'une variable aléatoire ϵ dont la loi est une loi normale.

   $$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{N}}$$

   contre

   $$\boxed{\mathcal{H}_1 : \mathcal{L}(\epsilon) \neq \mathcal{N}.}$$

   On utilise alors le test de Ryan-Joiner :

   ```
   W-test pour la normalité
   R:                               0,9906
   Valeur de P (approximatif) : > 0,1000
   ```

   Comme la $p-$valeur est strictement supérieure à $0,1$, elle est *a fortiori* strictement supérieure à $0,05$ qui est le seuil de notre test. On en déduit que le test n'est pas significatif au niveau $\alpha = 5$ % et que l'on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Il n'y a pas de différences significatives entre la loi de ϵ et une loi normale, au seuil $\alpha = 5$ %.

4. Comme l'hypothèse de normalité des erreurs n'a pas été rejétée à la question 3., on s'intéresse à nouveau à l'hypothèse d'homoscédasticité portant sur les erreurs.
Le plan d'expérience utilisé comporte des répétitions ce qui permet de tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ d'égalite des variances des erreurs $\epsilon_{i,j,k}$:

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \sigma^2_{1,1,1} = \sigma^2_{2,1,1} = \sigma^2_{1,2,1} = \sigma^2_{2,2,1} = \cdots = \sigma^2_{1,1,8} = \sigma^2_{2,1,8} = \sigma^2_{1,2,8} = \sigma^2_{2,2,8}}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Il existe une variance différente des autres.}}$$

Il est maintenant possible d'utiliser le test paramétrique de Bartlett puisque ses conditions d'application, normalité des erreurs, sont vérifiées.

```
Test de l'égalité des variances
Facteurs    Calorie  Vitamine

Test de Bartlett (loi normale)

Statistique du test : 2,233
P :                   0,525
```

Puisque la $p-$valeur du test est strictement supérieure au seuil $\alpha = 5$ %, le test est non significatif et l'on ne peut rejeter l'hypothèses nulle $\mathcal{H}_0$ d'homoscédasticité.

Toutes les conditions d'application du modèle de l'analyse de la variance à deux facteurs contrôlés avec répétitions et terme d'interaction sont vérifiées. Déterminons si le facteur *Calorie*, le facteur *Vitamine* ou l'interaction des deux facteurs a un effet sur le gain de *Poids*. On teste donc les hypothèses :

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'} : \alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'} : \text{Il existe } i_0 \in \{1, 2\} \text{ tel que } \alpha_{i_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{''} : \beta_1 = \beta_2 = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{''} : \text{Il existe } j_0 \in \{1, 2\} \text{ tel que } \beta_{j_0} \neq 0.}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_0^{'''} : \gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = \gamma_{2,1} = \gamma_{2,2} = 0}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1^{'''} : \text{Il existe } (i_0, j_0) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \text{ tel que } \gamma_{i_0,j_0} \neq 0.}$$

On consulte alors le tableau de l'analyse de la variance

```
Facteur      Type Niveaux  Valeurs
Vitamine     fixe       2  1 2
Calorie      fixe       2  1 2

Analyse de la variance pour Poids, en utilisant la SC ajustée
pour les tests

Source       DL     SC séq   SC ajust   CM ajust        F       P
Vitamine      1      215,3      215,3      215,3     2,51   0,124
Calorie       1     4347,8     4347,8     4347,8    50,69   0,000
Vitamine
*Calorie      1      306,3      306,3      306,3     3,57   0,069
Erreur       28     2401,6     2401,6       85,8
Total        31     7271,0
```

La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'}$ est de $0,124$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5$ % : le test n'est pas significatif à ce seuil. On ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur $Vitamine$ sur le gain de $Poids$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur $Vitamine$ n'a pas un effet significatif sur le gain de $Poids$. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de seconde espèce, il serait très intéressant de calculer la puissance a posteriori.
La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{''}$ est de $0,000$. Elle est inférieure ou égale à $\alpha = 5$ % : le test est significatif à ce seuil. On doit rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet du facteur $Calorie$ sur le $Poids$ et décider l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ d'existence d'un effet du facteur $Calorie$ sur le $Poids$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, le facteur $Calorie$ a un effet significatif sur le $Poids$. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de première espèce, le risque associé à la décision est donc de 5 %.
La $p-$valeur associée, par la statistique de Fisher, à l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0^{'''}$ est de $0,069$. Elle est strictement supérieure à $\alpha = 5$ % : le test n'est pas significatif à ce seuil. On ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ d'absence d'effet de l'interaction des facteurs $Vitamine$ et $Calorie$ sur le gain de $Poids$. Ainsi au niveau $\alpha = 5$ %, l'interaction des facteurs $Vitamine$ et $Calorie$ n'a pas un effet significatif sur le gain de $Poids$. En prenant cette décision, on risque de commettre une erreur de seconde espèce, il serait très intéressant de calculer la puissance a posteriori.
Il est possible de calculer les puissances recherchées avec Minitab. On utilise le fait que le dispositif étudié est ce que l'on appelle aussi un plan factoriel complet à deux niveaux puisqu'il s'agit d'un modèle d'analyse de la variance à deux facteurs avec le terme d'interaction et surtout que le plan d'expérience est équilibré. À l'aide de l'entrée **Plan factoriel à 2 niveaux** du sous menu **Puissance et effectif de l'échantillon** du menu **Stat** de Minitab, on obtient le résultat suivant :

```
Puissance et effectif de l'échantillon

Plan factoriel à 2 niveaux

Sigma = 9,26121  Alpha = 0,05

Facteurs :        2   Plan de base :          2; 4
Blocs :       aucun

  Points
centraux
par bloc    Effet    Répétitions  Puissance
       0    5,187              8     0,3338
       0    6,188              8     0,4464
```

La valeur de l'*Effet* correspond à l'écart le plus important en valeur absolue entre les estimations des différents niveaux du facteur. Ainsi pour le facteur $Vitamine$ l'*Effet* vaut $\alpha_2 - \alpha_1 = 2,594 - (-2,594) = 5,187$, il n'y avait en fait qu'une possibilité. Pour l'interaction entre les deux facteurs $Vitamine$ et $Calorie$ l'*Effet* vaut : $\gamma_{1,1} - \gamma_{1,2} = \gamma_{2,2} - \gamma_{2,1} = 3,094 - (-3,094) = 6,188$. Il y a deux facteurs, quatre sommets dans ce plan et aucun point central. La puissance a posteriori est donc relativement faible, 0,3338, dans le cas du facteur $Calorie$ et à peine meilleure, 0,4464, dans le cas de l'interaction entre les deux facteurs $Vitamine$ et $Calorie$. On aurait pu améliorer la puissance du test en augmentant le nombre de répétitions. On détermine le nombre de répétition nécessaire pour que l'on ait une puissance de 0,80, qui est généralement considéré comme un niveau satisfaisant pour la puissance d'un test.

```
Puissance et effectif de l'échantillon

Plan factoriel à 2 niveaux

Sigma = 9,26121  Alpha = 0,05

Facteurs :        2   Plan de base :          2; 4
Blocs :       aucun

  Points
centraux                               Puissance  Puissance
par bloc    Effet    Répétitions      cible     réelle
       0    5,187             26     0,8000     0,8074
       0    6,188             19     0,8000     0,8195
```

On constate qu'il aurait fallu 26 répétitions, donc 104 rats, pour obtenir une puissance d'au moins 0,80. On aurait multiplié par plus de trois l'ampleur de l'étude qui a été réalisée...

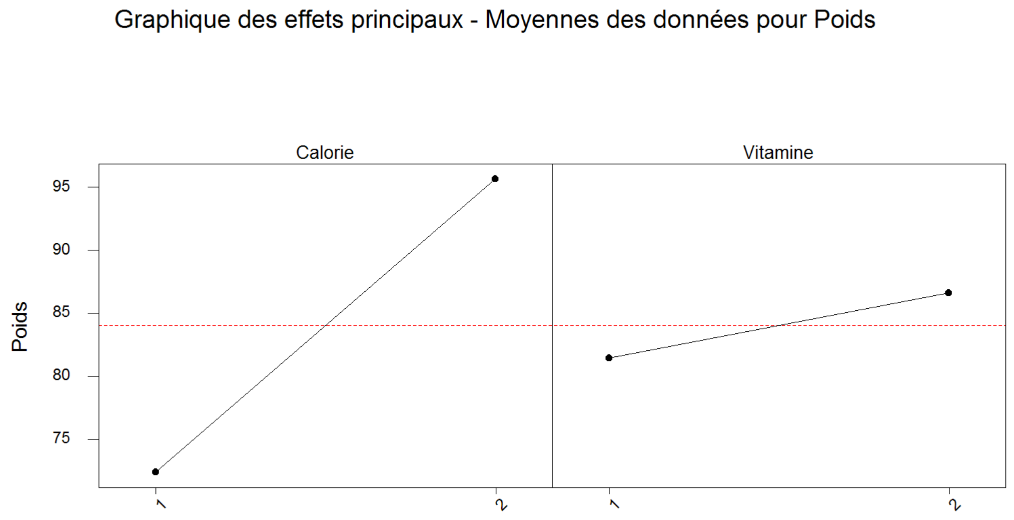
3. Les estimations des coefficients du modèle sont :

Terme		Coef	Er-T coef	T	P
Constante		84,031	1,637	51,33	0,000
Vitamine					
1		-2,594	1,637	-1,58	0,124
Calorie					
1		-11,656	1,637	-7,12	0,000
Vitamine*Calorie					
1	1	3,094	1,637	1,89	0,069

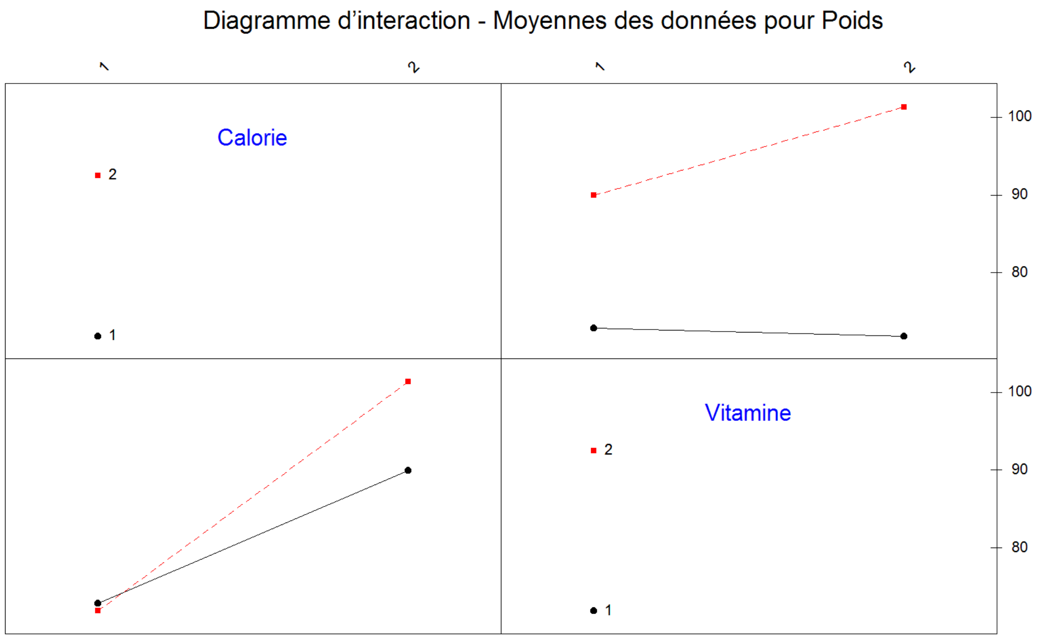
On en déduit que :

$$\widehat{\mu} = 84,031, \quad \widehat{\alpha_1} = -2,594, \quad \widehat{\alpha_2} = 2,594, \quad \widehat{\beta_1} = -11,656, \quad \widehat{\beta_2} = 11,656,$$
$$\widehat{\gamma_{1,1}} = 3,094, \quad \widehat{\gamma_{1,2}} = -3,094, \quad \widehat{\gamma_{2,1}} = -3,094, \quad \widehat{\gamma_{2,2}} = 3,094.$$

en utilisant les relations $\sum_{i=1}^{2} \widehat{\alpha_i} = 0$, $\sum_{j=1}^{2} \widehat{\beta_j} = 0$, $\widehat{\gamma_{1,1}} + \widehat{\gamma_{1,2}} = 0$, $\widehat{\gamma_{1,1}} + \widehat{\gamma_{2,1}} = 0$ et $\widehat{\gamma_{2,1}} + \widehat{\gamma_{2,2}} = 0$.
Remarquons que l'on n'a pas eu à utiliser la relation $\widehat{\gamma_{1,2}} + \widehat{\gamma_{2,2}} = 0$ ce qui était prévisible car, d'après le cours, l'on sait que l'on impose seulement $I + J - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$ relations **indépendantes** aux coefficients $\gamma_{i,j}$. On doit donc retrouver toutes les estimations $\widehat{\gamma_{i,j}}$ à l'aide des valeurs fournies par le logiciel et de seulement $I + J - 1 = 3$ des relations portant sur ces estimations.
À l'aide de l'entrée **Graphique des effets principaux** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab, on obtient la représentation graphique des estimations des $\mu + \alpha_1$, $\mu + \alpha_2$, $\mu + \beta_1$ et $\mu + \beta_2$. On comprend ainsi visuellement pourquoi le facteur facteur *Calorie* a un effet significatif sur le gain de *Poids* au seuil $\alpha = 5$ %. L'influence du facteur *Vitamine* n'est, quant à elle, pas significative au seuil $\alpha = 5$ % ce qui est bien confirmé par le graphique ci-dessous.



À l'aide de l'entrée **Diagramme des interactions** du sous menu **ANOVA** du menu **Stat** de Minitab, on obtient la représentation graphique de l'effet des interactions. Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$ d'absence d'interaction entre les deux facteurs $Vitamine$ et $Calorie$, dans chacune des deux cases, inférieure gauche et supérieure droite, du graphique, les deux segments représentés en noir et rouge[3] sont parallèles. La force d'une interaction est associée au défaut de parallélisme de ces deux segments. On constate visuellement que dans les deux cases du graphique les deux segments ne sont pas parallèles mais ces interactions entre les deux facteurs ne sont pas assez importantes pour qu'elles soient significatives au seuil $\alpha = 5$ %. Par contre ces interactions auraient été significatives au seuil $\alpha = 10$ % puisque l'on a une $p-$valeur de $0,069$ associée au test de l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0'''$.



4. Puisque l'on a rejeté l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0''$ d'absence d'effet du facteur $Calorie$ sur le gain de $Poids$. On peut réaliser des comparaisons multiples pour le facteur $Calorie$. Or ce facteur n'a que deux modalités ! Il n'est donc pas nécessaire de faire des investigations supplémentaires pour en déduire que ce sont les deux seuls niveaux du facteur $Calorie$, 1 et 2, qui sont significativement différents au seuil $\alpha = 5\%$.

[3] En gris si vous lisez une version imprimée de ce corrigé.