Tests non-paramétriques

Frédéric Bertrand[1] & Myriam Maumy[1]

[1]IRMA, Université de Strasbourg
Strasbourg, France

Master 1re Année
2016-2017

2ème partie

Tests non paramétriques : Le test de Kruskal-Wallis

Sommaire

Introduction

Nous observons, de manière indépendante, une variable aléatoire X de loi continue, sur $k \geqslant 3$ populations, ou sur une population divisée en $k \geqslant 3$ sous-populations.

Nous supposons ainsi que nous disposons de k échantillons aléatoires **indépendants** $(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}), \ldots, (X_{k,1}, \ldots, X_{k,n_k})$ et de $k \geqslant 3$ séries d'observations $(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1})$ pour la première, $\ldots$, $(x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k})$ pour la dernière. Nous notons $\mathcal{L}_i(X)$ la loi de la variable aléatoire X sur la (sous-)population d'ordre i avec $1 \leqslant i \leqslant k$.

Sans faire d'hypothèses spécifiques, le test de Kruskal-Wallis ne permet pas de tester l'égalité des moyennes ni celle des médianes.

Hypothèses du test

Le **test de Kruskal-Wallis** est utilisé pour tester les hypothèses suivantes :

$$\boxed{\mathcal{H}_0 : \mathcal{L}_1(X) = \cdots = \mathcal{L}_i(X) = \cdots = \mathcal{L}_k(X)}$$

contre

$$\boxed{\mathcal{H}_1 : \text{Les lois } \mathcal{L}_1(X), \ldots, \mathcal{L}_k(X) \text{ ne sont pas toutes identiques.}}$$

Sommaire

Statistique de test

Calculons :

1. le rang $R_{i,j}$ de $X_{i,j}$ parmi les $n_\bullet$ valeurs ;
2. puis la somme des rangs associée à chaque échantillon :

$$R_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{n_i} R_{i,j} \,;$$

3. la moyenne des rangs de chaque échantillon :

$$\overline{R_{i,\bullet}} = R_{i,\bullet}/n_i.$$

Statistique de test (suite)

La statistique de Kruskal-Wallis $KW_{n_\bullet}$ prend en compte l'écart entre la moyenne des rangs de chaque échantillon et la moyenne de tous les rangs, qui vaut $(n_\bullet + 1)/2$:

$$\begin{aligned} KW_{n_\bullet} &= \frac{12}{n_\bullet(n_\bullet+1)} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{R_{i,\bullet}} - \frac{n_\bullet + 1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{12}{n_\bullet(n_\bullet+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{{R_{i,\bullet}}^2}{n_i} - 3(n_\bullet + 1). \end{aligned}$$

Propriétés

Lorsque l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est vraie, la variable aléatoire $KW_{n_\bullet}$ a les trois propriétés suivantes.

1. Pour $i = 1, \ldots, k$, $W_i = n_i \overline{R_{i,\bullet}}$ est la statistique de Wilcoxon qui compare le i–ème traitement aux $k-1$ autres traitements.

   Sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, nous en déduisons que $\mathbb{E}(W_i) = n_i(n_\bullet + 1)/2$ et $\mathrm{Var}(W_i) = n_i(n_\bullet - n_i)(n_\bullet + 1)/12$.

   Ainsi par conséquent, nous avons :

$$KW_{n_\bullet} = \frac{1}{n_\bullet} \sum_{i=1}^{k} (n_\bullet - n_i) \frac{(W_i - \mathbb{E}(W_i))^2}{\mathrm{Var}(W_i)}.$$

Propriétés (suite)

2. **(Suite)** Nous calculons alors l'espérance et la variance de $KW_{n_\bullet}$ sous l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(KW_{n_\bullet}) &= k-1, \\
\mathrm{Var}(KW_{n_\bullet}) &= 2(k-1) - \frac{2\left[3k^2 - 6k + n_\bullet(2k^2 - 6k + 1)\right]}{5n_\bullet(n_\bullet + 1)} \\
&\quad - \frac{6}{5} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}.
\end{aligned}$$

3. Il est possible de déterminer la distribution de $KW_{n_\bullet}$ bien que le calcul soit complexe. Elle est donc tabulée pour les faibles valeurs des n_i.

Règle de décision et conclusion du test

- **Premier cas :** L'un des effectifs n_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, est inférieur ou égal à 4, . Pour un seuil donné α, des tables de la loi de Kruskal-Wallis nous fournissent une valeur critique c_α. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \textit{si } KW_{n_\bullet}(obs) \geqslant c_\alpha & \mathcal{H}_1 \textit{ est vraie,} \\ \textit{si } KW_{n_\bullet}(obs) < c_\alpha & \mathcal{H}_0 \textit{ est vraie.} \end{cases}$$

  Le niveau de signification réel du test est généralement strictement inférieur à α.

Règle de décision et conclusion du test (suite)

- **Second cas :** Si $n_i \geqslant 5$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, nous utilisons l'approximation $KW_{n_\bullet} \approx \chi^2(k-1)$. Pour un seuil donné α, des tables de la loi du χ^2 nous fournissent une valeur critique c_α telle que $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(-c_\alpha < Z_{n_1,n_2} < c_\alpha) = 1 - \alpha$. Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \textit{si } KW_{n_\bullet}(obs) \geqslant c_\alpha & \mathcal{H}_1 \textit{ est vraie,} \\ \textit{si } KW_{n_\bullet}(obs) < c_\alpha & \mathcal{H}_0 \textit{ est vraie.} \end{cases}$$

  Lorsque nous rejetons $\mathcal{H}_0$, nous décidons que $\mathcal{H}_1$ est vraie avec un risque d'erreur de première espèce α.
  Lorsque nous conservons $\mathcal{H}_0$, c'est avec un risque d'erreur de deuxième espèce β.

Sommaire

Présence d'ex æquo dans les observations : la méthode des rangs moyens

À chaque nombre appartenant à un groupe d'ex æquo nous attribuons le rang moyen du groupe auquel il appartient puis nous déterminons la somme $T = \sum_{l=1}^{h}(t_l^3 - t_l)$ où t_l désigne le nombre d'éléments du $l-$ème groupe d'ex æquo. Il est d'usage de substituer à $KW_{n_\bullet}$ la variable $KW_{n_\bullet}^{\star}$ définie par :

$$KW_{n_\bullet}^{\star} = \frac{KW_{n_\bullet}}{1 - \dfrac{T}{n_\bullet^3 - n_\bullet}}.$$

Sommaire

Test de Steel-Dwass-Critchlow-Fligner

$W_{n_i,n_{i'}}$ est la statistique de Wilcoxon qui compare le $i-$ème traitement au $i'-$ème traitement.

Les observations des deux groupes i et i' sont ordonnées puis regroupées en h classes d'ex æquo C_j, $1 \leqslant j \leqslant h$.

Notons d_j le nombre d'ex æquo de la classe C_j et $m_{i,i'} = n_i + n_{i'}$.

Test de Steel-Dwass-Critchlow-Fligner (suite)

Nous décidons qu'**au seuil global** α deux lois $\mathcal{L}_i(X)$ et $\mathcal{L}_{i'}(X)$, parmi les $\boldsymbol{k(k-1)}$ **comparaisons** que nous allons faire, sont significativement différentes si :

$$\left| W_{n_i,n_{i'}} - \frac{n_i(m_{i,i'}+1)}{2} \right| \geqslant q'(k;+\infty;1-\alpha)\sqrt{\frac{n_i n_{i'}(m_{i,i'}+1)}{24}} \times \sqrt{\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{h}\left(d_j^3 - d_j\right)}{m_{i,i'}^3 - m_{i,i'}}\right)}$$

où $q'(k;+\infty;1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ pour la loi du maximum du module studentisé pour k moyennes et $+\infty$ degrés de liberté.

Test de Steel-Dwass-Critchlow-Fligner (suite)

Contrairement aux trois autres approches présentées ci-après, le **test Steel-Dwass-Critchlow-Fligner** n'est pas qu'une procédure de comparaisons multiples : c'est une **alternative complète** au test de **Kruskal-Wallis**.

Autres tests de comparaisons multiples

Si nous rejetons l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, nous nous demandons quelles sont les lois $\mathcal{L}_i(X)$ qui diffèrent.

Les formules ci-après sont valables en absence ou en présence d'ex æquo. En absence d'ex æquo, le terme $1 - T/(n_\bullet^3 - n_\bullet)$ est égal à 1.

Application de la méthode de Sheffé

Nous décidons qu'**au seuil** α **deux lois** $\mathcal{L}_i(X)$ et $\mathcal{L}_{i'}(X)$ sont significativement différentes si :

$$\left|\overline{R_{i,\bullet}} - \overline{R_{i',\bullet}}\right| \geqslant \sqrt{\chi^2(k-1;1-\alpha)}\sqrt{\frac{n_\bullet(n_\bullet+1)}{12}\left(1 - \frac{T}{n_\bullet^3 - n_\bullet}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}},$$

où $\chi^2(k-1;1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ pour la loi du χ^2 à $k-1$ degrés de liberté.

Application de l'inégalité de Bonferroni

Nous décidons qu'**au seuil global** α deux lois $\mathcal{L}_i(X)$ et $\mathcal{L}_{i'}(X)$, parmi les $\boldsymbol{k(k-1)}$ **comparaisons** que nous allons faire, sont significativement différentes si :

$$\left|\overline{R_{i,\bullet}} - \overline{R_{i',\bullet}}\right| \geqslant u\left(1 - \frac{\alpha}{k(k-1)}\right)\sqrt{\frac{n_\bullet(n_\bullet+1)}{12}\left(1 - \frac{T}{n_\bullet^3 - n_\bullet}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}},$$

où $u(1-\alpha/(k(k-1)))$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/(k(k-1))$ pour la loi normale centrée-réduite.

Remarque

Il s'agit d'une application des inégalités de Bonferroni. Cette procédure est plus puissante que la précédente.

Il est également possible d'utiliser une approche séquentielle comme la procédure de Holm-Bonferroni (test de Dunn) ou de Holm-Sidak.

Analogue de la méthode de Tukey-Kramer

Nous décidons qu'**au seuil global** α deux lois $\mathcal{L}_i(X)$ et $\mathcal{L}_{i'}(X)$, parmi les $\boldsymbol{k(k-1)}$ **comparaisons** que nous allons faire, sont significativement différentes si :

$$\left|\overline{R_{i,\bullet}} - \overline{R_{i',\bullet}}\right| \geqslant q(k;+\infty;1-\alpha)\sqrt{\frac{n_\bullet(n_\bullet+1)}{12}\left(1 - \frac{T}{n_\bullet^3 - n_\bullet}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)},$$

où $q(k;+\infty;1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ pour la loi de l'étendue studentisée pour k moyennes et $+\infty$ degrés de liberté.

Remarque

Il s'agit d'une procédure analogue à celle de Tukey-Kramer dans le cas paramétrique et valide asymptotiquement. Elle est généralement plus puissante que les deux approches précédentes.

Sommaire

Application

Des forestiers ont réalisé des plantations d'arbres en trois endroits.

Plusieurs années plus tard, ils souhaitent savoir si la hauteur moyenne des arbres est identique dans les trois forêts. Chacune des forêts constitue une population et dans chacune d'entre elles, un échantillon d'arbres est tiré au sort. Puis la hauteur de chaque arbre est mesurée en mètres. Le tableau ci-après donne les valeurs des mesures de hauteur ainsi que les moyennes et les variances corrigées estimées dans chacun des groupes.

Données

	Forêt 1	Forêt 2	Forêt 3
Données expérimentales (en mètres)	23,4	18,9	22,5
	24,4	21,1	22,9
	24,6	21,1	23,7
	24,9	22,1	24,0
	25,0	22,5	24,0
	26,2	23,5	24,5
Moyennes	24,750	21,533	23,600
Variances corrigées	0,831	2,487	0,568

La Figure 1 correspond aux boîtes à moustaches de la hauteur en fonction des trois forêts.

Représentation graphique

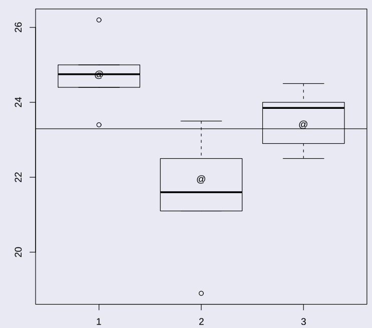


FIGURE – Boîtes à moustaches (à gauche) – Comparaisons multiples (à droite)

Statistique du test

Nous sommes en présence d'ex æquo, nous devons donc utiliser la statistique de test $KW^{\star}_{n_\bullet}$ à la place de la statistique de test $KW_{n_\bullet}$.

Nous calculons la valeur de $KW^{\star}_{n_\bullet}$ sur l'échantillon : $KW^{\star}_{n_\bullet}(obs) = 11,51$.

Règle de décision à l'aide d'une valeur critique

Pour un seuil $\alpha = 5\%$ la valeur critique d'un Khi-deux à 2 degrés de liberté, est $c_{0,05} = 5,99$. Comme $KW^{\star}_{n_\bullet}(obs) \leqslant c_{0,05}$, nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, et que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie. Il y a une influence significative, au seuil $\alpha = 5\%$, de la forêt sur la hauteur des arbres. Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui vaut $\alpha = 5\%$.

Remarque

La valeur de $KW_{n_\bullet}(obs)$ est égale à $11,48$. Nous remarquons la différence apportée par la correction pour prendre en compte les ex æquo.

Règle de décision à l'aide d'une *p*-valeur

En utilisant un logiciel de statistique nous calculons la *p*-valeur du test de Kruskal-Wallis. Il faut bien vérifier qu'elle tient compte des ex æquo. Elle vaut dans cas $0,003$.

Comme la *p*-valeur est $\leqslant 0,05$, nous décidons, au seuil $\alpha = 5\%$, de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, et que l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ est vraie. Il y a une influence significative, au seuil $\alpha = 5\%$, de la forêt sur la hauteur des arbres. Le risque associé à cette décision est un risque de première espèce qui vaut $\alpha = 5\%$.

Comparaisons multiples avec Minitab

Données désempilées, comparaisons 2 à 2

```
MTB> %KrusMc c1-c3;
SUBC> unstacked;
SUBC> Falpha 0,05.
```

Résultats

```
Kruskal-Wallis: Multiple Comparisons

Test de Kruskal-Wallis sur the data

                           Rang
Group       N  Médiane  moyen       Z
Forêt_1     6    24,75   14,5    2,81
Forêt_2     6    21,60    4,1   -3,04
Forêt_3     6    23,85    9,9    0,23
Global     18             9,5

B H = 11,48  DL = 2  P = 0,003
H = 11,51  DL = 2  P = 0,003
(ajusté pour les nombres de même grandeur)
```


Résultats

```
Kruskal-Wallis: All Pairwise Comparisons
----------------------------------------

Comparisons:                        3
Ties:                               3
Family Alpha:                       0,05
Bonferroni Individual Alpha:        0,017
Bonferroni Z-value (2-sided):       2,394

----------------------------------------
```


Résultats

```
Standardized Absolute Mean Rank Differences
|Rbar(i)-Rbar(j)| / Stdev

Rows:     Group i = 1,...,n
Columns:  Group j = 1,...,n

1. Table of Z-values

Forêt_1  0,00000        *   *
Forêt_2  3,37961  0,00000   *
Forêt_3  1,48703  1,89258   0
-------------------------------------------
```


Résultats

```
Adjusted for Ties in the Data

1. Table of Z-values
Forêt_1  0,00000        *   *
Forêt_2  3,38486  0,00000   *
Forêt_3  1,48934  1,89552   0

2. Table of P-values
Forêt_1  1,00000        *   *
Forêt_2  0,00071  1,00000   *
Forêt_3  0,13640  0,05802   1
-------------------------------------------
```

Résultats

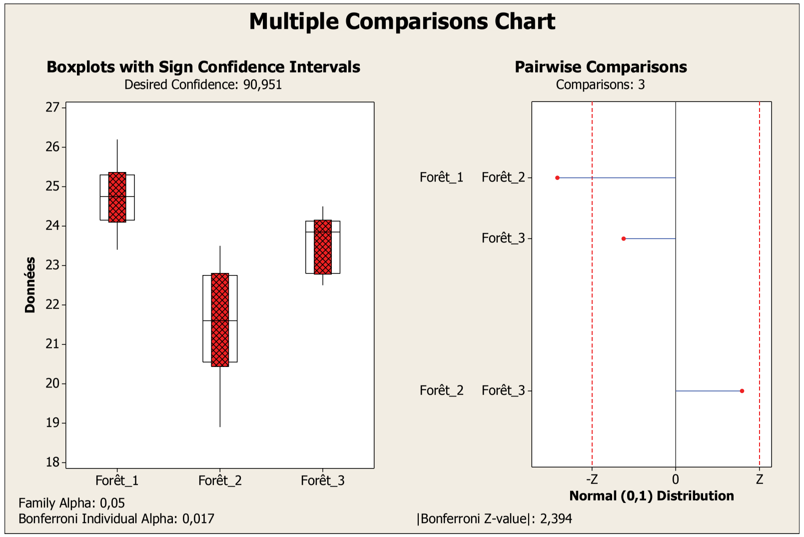
```
Sign Confidence Intervals controlled at a
family error rate of 0,05

Desired Confidence:    90,951
Intervalle de confiance pour le test du
signe de la médiane

                               Intervalle de
                  Confiance     confiance
    N Médiane   atteinte  Inférieur Supérieur Pos.
F_1 6   24,75     0,7813      24,40     25,00    2
                  0,9095      24,10     25,36  NLI
                  0,9688      23,40     26,20    1
```


Résultats

```
F_2 6   21,60     0,7813      21,10     22,50    2
                  0,9095      20,44     22,80  NLI
                  0,9688      18,90     23,50    1
F_3 6   23,85     0,7813      22,90     24,00    2
                  0,9095      22,78     24,15  NLI
                  0,9688      22,50     24,50    1
```


Résultats

```
Kruskal-Wallis: Conclusions

The following groups showed significant
differences (adjusted for ties):

Groups                Z vs. Critical value P-value
Forêt_1 vs. Forêt_2    3,38486 >= 2,394     0,0007
```

Comparaisons multiples avec Minitab

Données désempilées, comparaisons avec un contrôle

```
MTB> %KrusMc c1 c2;
SUBC> Control c3;
SUBC> unstacked;
SUBC> Falpha 0,05.
```


Résultats

```
Kruskal-Wallis: Multiple Comparisons

Test de Kruskal-Wallis sur the data

                                Rang
Group      N  Médiane  moyen       Z
Forêt_1    6    24,75   14,5    2,81
Forêt_2    6    21,60    4,1   -3,04
Forêt_3    6    23,85    9,9    0,23
Global    18             9,5

B H = 11,48  DL = 2  P = 0,003
H = 11,51  DL = 2  P = 0,003
(ajusté pour les nombres de même grandeur)
```


Résultats

```
Kruskal-Wallis: Comparisons to a Control
----------------------------------------


Comparisons:                     2
Ties:                            3
Family Alpha:                    0,05
Bonferroni Individual Alpha:     0,025
Bonferroni Z-value (2-sided):    2,241


----------------------------------------
```


Résultats

```
Standardized Absolute Mean Rank Differences
|Rbar(i)-Rbar(Control)| / Stdev

Rows:      Group i = 1,...,n-1
Column:    Control Group: Forêt_3

    Z-value

Forêt_1   1,48703
Forêt_2   1,89258
------------------------------------------
```

Résultats

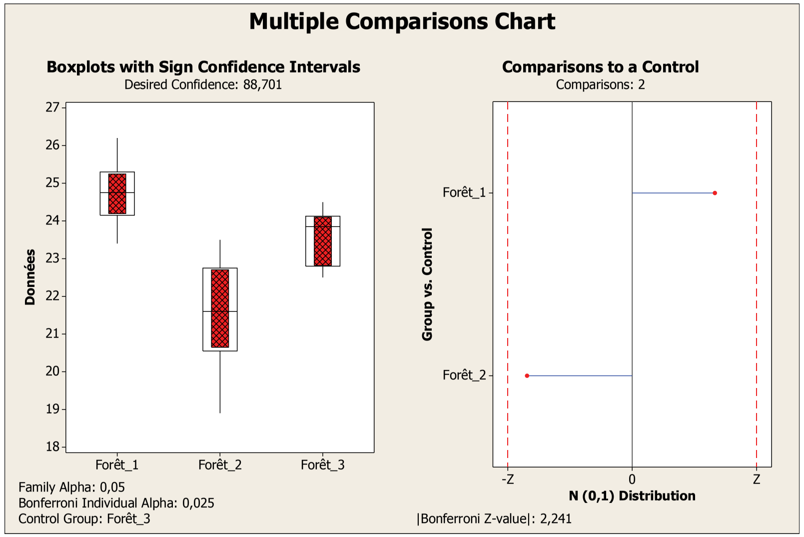
```
Adjusted for Ties in the Data

 Z-value vs. Critical value   P-value

Forêt_1  1,48934   < 2,24140  0,1364
Forêt_2  1,89552   < 2,24140  0,0580

-------------------------------------------
```


Résultats

```
Sign Confidence Intervals controlled at a
family error rate of 0,05

Desired Confidence:    88,701

Intervalle de confiance pour le test du
signe de la médiane

                                   Intervalle de
                   Confiance         confiance
    N Médiane     atteinte   Inférieur  Supérieur  Pos.
F_1 6    24,7       0,7813       24,40      25,00     2
                    0,8870       24,19      25,25   NLI
                    0,9688       23,40      26,20     1
```


Résultats

```
F_2 6   21,60     0,7813       21,10       22,50       2
                  0,8870       20,65       22,71     NLI
                  0,9688       18,90       23,50       1
F_3 6   23,85     0,7813       22,90       24,00       2
                  0,8870       22,82       24,10     NLI
                  0,9688       22,50       24,50       1
```

Comparaisons multiples avec Minitab

Données empilées, comparaisons 2 à 2

Supposons que la colonne `C1` contienne le facteur explicatif et la colonne `C2` les valeurs observées de la réponse.

```
MTB> %KrusMc c1 c2;
SUBC> Falpha 0,05.
```


Contexte du test
Absence d'ex æquo dans les observations
Présence d'ex æquo dans les observations
Comparaisons multiples
Application

Comparaisons multiples avec Minitab

Données empilées, comparaisons avec un contrôle

Supposons que la colonne `C1` contienne le facteur explicatif et la colonne `C2` les valeurs observées de la réponse. Attention pour faire des comparaisons avec un groupe contrôle, les observations pour ce groupe doivent être nécessairement dans une autre colonne, ici `C3`.

```
MTB> %KrusMc c1 c2;
SUBC> Control c3;
SUBC> Falpha 0,05.
```