Régression linéaire simple

Frédéric Bertrand
Myriam Maumy-Bertrand

Master 1 – 2016/2017

Références

- « Analyse de régression appliquée » de Y. Dodge et V. Rousson, aux éditions Dunod, 2004.
- « Régression non linéaire et applications » de A. Antoniadis, J. Berruyer, R. Carmona, éditions Economica, 1992.

Introduction

But : rechercher une relation stochastique qui lie deux ou plusieurs variables

Domaines :

- Physique, chimie, astronomie
- Biologie, médecine
- Géographie
- Economie
- …

1. Relation entre deux variables

Considérons X et Y deux variables.

Exemple : la taille (X) et le poids (Y)

But : savoir comment Y varie en fonction de X

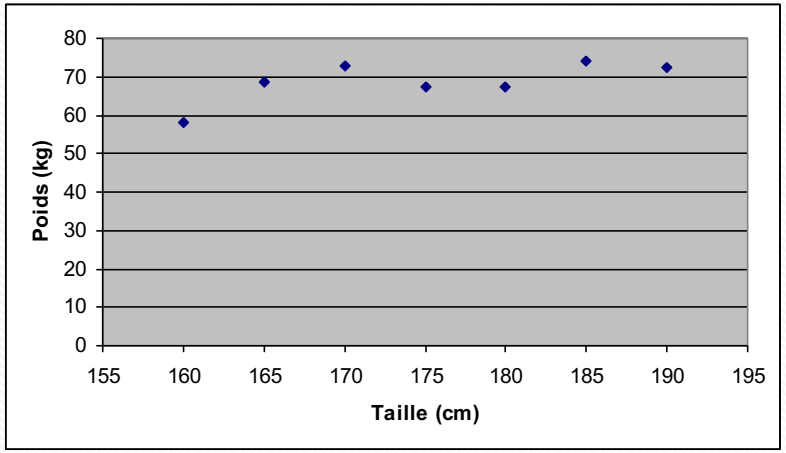
Dans la pratique :

- Échantillon de n individus
- Relevé de la taille et du poids pour l'individu i

➡ Tableau d'observations ou données pairées.

1. Relation entre deux variables

Observations	Taille	Poids
1	160	57,9
2	165	68,5
3	170	72,7
4	175	67,4
5	180	67,4
6	185	74,1
7	190	72,6



2. Relation déterministe

Dans certains cas, la relation est exacte.

Exemples :

- X en euros, Y en dollars
- X distance ferroviaire, Y prix du billet.

$$\boxed{Y = f(X)}$$

où f est une fonction déterminée.

Exemples pour f : fonctions linéaires, fonctions affines…

2. Relation déterministe

Remarque importante :

Nous utiliserons le terme de fonction « linéaire » pour désigner une fonction « affine »

$$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

où β_0 et β_1 sont des réels fixés.

2. Relation déterministe

Exemple : X en Celsius, Y en Farenheit

$$Y=32 + 9/5\ X.$$

Ici nous avons en identifiant : $\beta_0 = 32$ et $\beta_1 = 9/5$.

Souvent nous savons que la relation entre X et Y est linéaire mais les coefficients sont inconnus.

2. Relation déterministe

En pratique comment faisons-nous ?

- Échantillon de *n* données
- Vérifier que les données sont alignées.

Si ce cas est vérifié, alors nous avons : un **modèle linéaire déterministe.**

2. Relation déterministe

Si ce cas n'est pas vérifié, alors nous allons chercher : **la droite qui ajuste le mieux l'échantillon**, c'est-à-dire nous allons chercher un **modèle linéaire non déterministe**.

Les *n* observations vont permettre de vérifier si la droite candidate est adéquate.

3. Relation stochastique

La plupart des cas ne sont pas des modèles linéaires déterministes !
(la relation entre X et Y n'est pas exacte)

Exemple : X la taille et Y le poids.
A 180 cm peuvent correspondre plusieurs poids :
75 kg, 85 kg, …
Les données ne sont plus alignées.
Pour deux poids identiques, nous avons deux tailles différentes.

3. Relation stochastique

Une hypothèse raisonnable : X et Y sont liés

Dans l'exemple précédent : plus un individu est grand, plus il est lourd

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

ε : est une variable qui représente le comportement individuel.

3. Relation stochastique

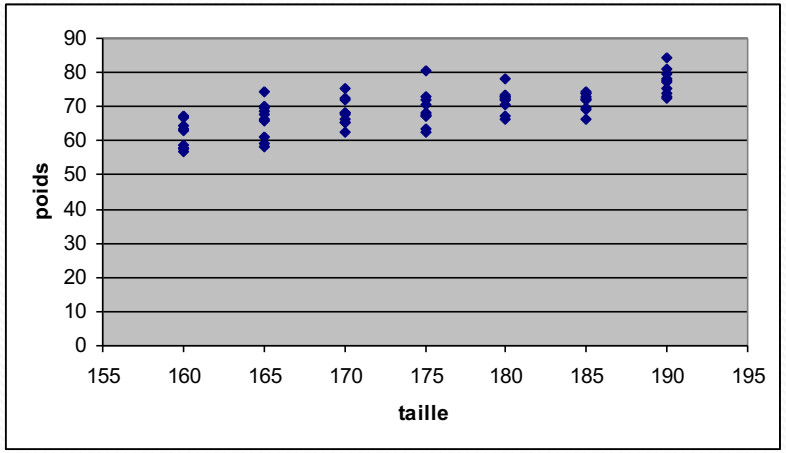
Exemple :

70 individus qui sont répartis de la façon suivante :

- 10 individus/taille
- 7 tailles (de 160 à 190 cm, pas de 5 cm).

3. Relation stochastique

Observations	Taille	Poids
1	160	57,9
2	160	58,9
3	160	63,3
4	160	56,8
5	160	66,8
6	160	64,5
7	160	67,1
8	160	58,0
9	160	62,9
10	160	57,7
11	165	68,5
12	165	69,8
13	165	58,5
14	165	66,3
15	165	65,8



3. Relation stochastique

Commentaires :

- Plusieurs Y pour une même valeur de X.

  ➡ Modèle linéaire déterministe inadéquat.

- Cependant Y augmente quand X augmente.

  ➡ Modèle linéaire stochastique envisageable.

3. Relation stochastique

Définition du modèle linéaire stochastique :

$$\mu_Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$\mu_Y(x)$: moyenne de Y mesurée sur tous les individus pour lesquels X vaut x.

3. Relation stochastique

Remarques :

- Comme ε, $\mu_Y(x)$ n'est ni observable, ni calculable.
- Pour calculer $\mu_Y(x)$, il faudrait recenser **<u>tous</u>** les individus de la population.

3. Relation stochastique

Dans la pratique :

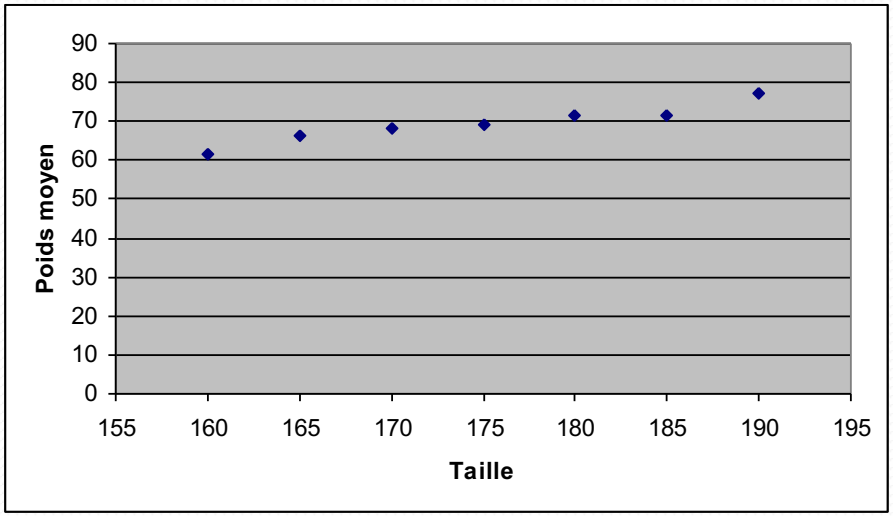
Nous estimons la moyenne théorique $\mu_Y(\mathrm{x})$ par la moyenne empirique de Y définie par :

$$\bar{y}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(x)$$

3. Relation stochastique

Retour à l'exemple :

Taille	Poids
160	61,39
165	66,16
170	68,34
175	69,29
180	71,76
185	71,58
190	77,28



3. Relation stochastique

La droite que nous venons de tracer s'appelle :

la droite de régression.

X et Y ne jouent pas un rôle identique.

X explique Y ⇒ X est une variable indépendante (ou explicative) et Y est une variable dépendante (ou expliquée).

3. Relation stochastique

En analyse de régression linéaire :

x_i est fixé

y_i est aléatoire

la composante aléatoire d'un y_i est le ε_i correspondant.

3. Relation stochastique

Pour l'instant, la droite de régression est inconnue.

Tout le problème est d'estimer β_0 et β_1 à partir d'un échantillon de données.

3. Relation stochastique

Choix des paramètres : droite qui approche le mieux les données

➡ introduction de $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ qui sont des estimateurs de β_0 et de β_1.

L'estimation de la droite de régression :

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

3. Relation stochastique

Remarques :

- $\hat{y}(x)$ est un estimateur de $\mu_Y(x)$
- Si le modèle est bon, $\hat{y}(x)$ est plus précis que

$$\bar{y}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(x)$$

3. Relation stochastique

Lorsque $x = x_i$, alors $\hat{y}(x_i) = \hat{y}_i$, c'est-à-dire :

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

$\hat{y}_i$ est appelée la valeur estimée par le modèle.

3. Relation stochastique

Ces valeurs estiment les quantités inobservables :

$$\varepsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$$

par les quantités observables :

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

3. Relation stochastique

- Ces quantités e_i = les résidus du modèle.
- La plupart des méthodes d'estimation : estimer la droite de régression par une droite qui minimise une fonction de résidus.
- La plus connue : la méthode des moindres carrés ordinaires.

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Méthode : Définir des estimateurs qui minimisent la somme des carrés des résidus

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs sont donc les coordonnées du minimum de la fonction à deux variables :

$$z = f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

Cette fonction est appelée la **fonction objectif**.

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs correspondent aux valeurs annulant les dérivées partielles de cette fonction :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_0} = -2\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_1} = -2\sum x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs sont les solutions du système :

$$-2\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$
$$-2\sum x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

Soient :

$$(4.1) \quad \sum y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i$$

$$(4.2) \quad \sum x_i y_i = \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Nous notons :

$$\bar{x}_n = \frac{\sum x_i}{n} \text{ et } \bar{y}_n = \frac{\sum y_i}{n}$$

D'après (4.1), nous avons :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{x}_n$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

A partir de (4.2), nous avons :

$$\hat{\beta}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i - \hat{\beta}_0 n \bar{x}_n$$
$$= \sum x_i y_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n + \hat{\beta}_1 n (\bar{x}_n)^2$$

Ainsi nous obtenons :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum x_i^2 - n(\bar{x}_n)^2}$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Comme nous avons :

$$\sum (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = \sum x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n$$

$$\sum (x_i - \bar{x}_n)^2 = \sum x_i^2 - n(\bar{x}_n)^2$$

Ainsi nous obtenons :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Dans la pratique, nous calculons $\hat{\beta}_1$ puis $\hat{\beta}_0$

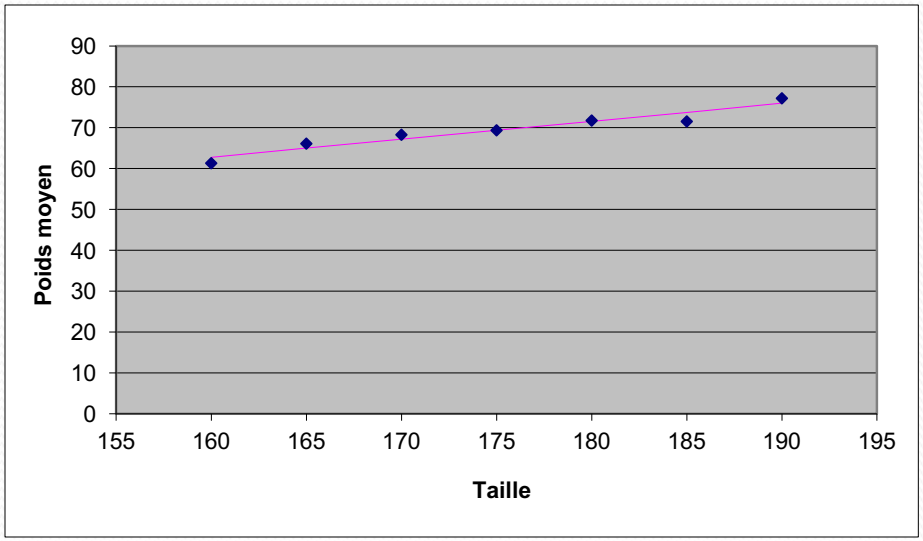
Nous obtenons une estimation de la droite de régression, appelée la **droite des moindres carrés ordinaires :**

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Coefficients de la droite de moindres carrés :

pente=0,442 ; ordonnée à l'origine=-8,012



5. Variation expliquée et inexpliquée

But d'un modèle de régression linéaire :

expliquer une partie de la variation de la variable expliquée *Y*.

La variation de *Y* vient du fait de sa dépendance à la variable explicative *X*.

➡ **Variation expliquée par le modèle.**

5. Variation expliquée et inexpliquée

Dans **l'exemple « taille-poids »**, nous avons remarqué que lorsque nous mesurons Y avec une même valeur de X, nous observons une certaine variation sur Y.

➡ **Variation inexpliquée par le modèle.**

5. Variation expliquée et inexpliquée

Variation totale de *Y*

= Variation expliquée par le modèle

+ Variation inexpliquée par le modèle

5. Variation expliquée et inexpliquée

Pour mesurer la variation de *Y* : nous introduisons $\bar{y}_n$

$$(y_i - \bar{y}_n) = (\hat{y}_i - \bar{y}_n) + (y_i - \hat{y}_i)$$

Différence expliquée par le modèle

Différence inexpliquée par le modèle ou résidu du modèle

5. Variation expliquée et inexpliquée

Pourquoi la méthode des moindres carrés ?

- Un propriété remarquable : elle conserve une telle décomposition en considérant la somme des carrés de ces différences :

$$\sum (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

5. Variation expliquée et inexpliquée

$$\sum (y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Somme des carrés totale

(SC_{tot})

Somme des carrés due à la régression

(SC_{reg})

Somme des carrés des résidus

(SC_{res})

5. Variation expliquée et inexpliquée

Mesure du pourcentage de la variation totale expliquée par le modèle :

Introduction d'un **coefficient de détermination**

$$R^2 = \frac{\text{Variation expliquée}}{\text{Variation totale}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{reg}}}{\mathrm{SC}_{tot}}$$

5. Variation expliquée et inexpliquée

Quelques remarques :

- R^2 est compris entre 0 et 1.
- R^2 =1 : cas où les données sont parfaitement alignées (comme c'est le cas pour un modèle déterministe).
- R^2 =0 : cas où la variation de Y n'est pas due à la variation de X. Les données ne sont pas du tout alignées.
- Plus R^2 est proche de 1, plus les données sont alignées sur la droite de régression.