# Régression linéaire simple

Frédéric Bertrand
Myriam Maumy-Bertrand

Master 1 – 2018/2019

# Références

- « Analyse de régression appliquée » de Y. Dodge et V. Rousson, aux éditions Dunod, 2004.
- « Régression non linéaire et applications » de A. Antoniadis, J. Berruyer, R. Carmona, éditions Economica, 1992.

# Introduction

**But :** rechercher une relation stochastique qui lie deux ou plusieurs variables

**Domaines :**

- Physique, chimie, astronomie
- Biologie, médecine
- Géographie
- Economie
- …

# 1. Relation entre deux variables

Considérons $X$ et $Y$ deux variables.

**Exemple :** la taille ($X$) et le poids ($Y$)

**But :** savoir comment $Y$ varie en fonction de $X$

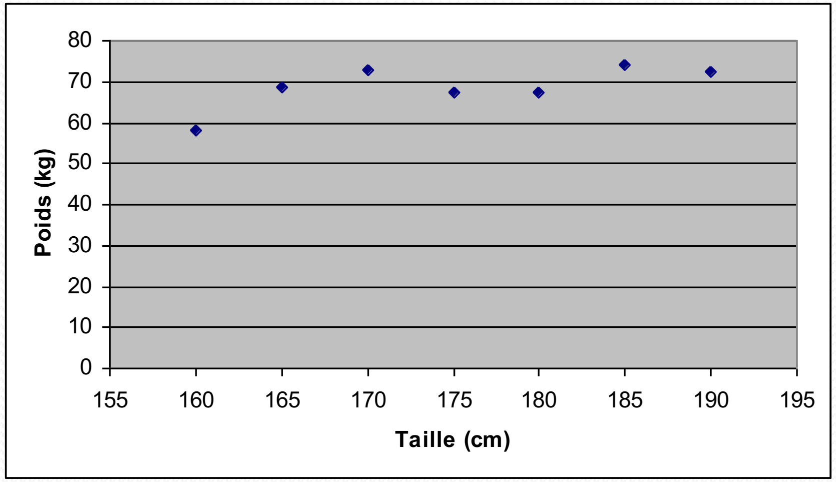
**Dans la pratique :**

- Échantillon de $n$ individus
- Relevé de la taille et du poids pour l'individu $i$

⇨ Tableau d'observations ou données pairées.

# 1. Relation entre deux variables

| Observations | Taille | Poids |
|---|---|---|
| 1 | 160 | 57,9 |
| 2 | 165 | 68,5 |
| 3 | 170 | 72,7 |
| 4 | 175 | 67,4 |
| 5 | 180 | 67,4 |
| 6 | 185 | 74,1 |
| 7 | 190 | 72,6 |



# 2. Relation déterministe

Dans certains cas, la relation est exacte.

**Exemples :**

- $X$ en euros, $Y$ en dollars
- $X$ distance ferroviaire, $Y$ prix du billet.

$$\boxed{Y = f(X)}$$

où $f$ est une fonction déterminée.

**Exemples pour $f$ :** fonctions linéaires, fonctions affines…

# 2. Relation déterministe

**Remarque importante :**

Nous utiliserons le terme de fonction « linéaire » pour désigner une fonction « affine »

$$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$$

où $\beta_0$ et $\beta_1$ sont des réels fixés.

# 2. Relation déterministe

**Exemple :** $X$ en Celsius, $Y$ en Farenheit

$$Y = 32 + 9/5\, X.$$

Ici nous avons en identifiant : $\beta_0 = 32$ et $\beta_1 = 9/5$.

Souvent nous savons que la relation entre $X$ et $Y$ est linéaire mais les coefficients sont inconnus.

# 2. Relation déterministe

**En pratique comment faisons-nous ?**

- Échantillon de $n$ données
- Vérifier que les données sont alignées.

Si ce cas est vérifié, alors nous avons : un **modèle linéaire déterministe.**

# 2. Relation déterministe

Si ce cas n'est pas vérifié, alors nous allons chercher : **la droite qui ajuste le mieux l'échantillon**, c'est-à-dire nous allons chercher un **modèle linéaire non déterministe**.

Les *n* observations vont permettre de vérifier si la droite candidate est adéquate.

# 3. Relation stochastique

**La plupart des cas ne sont pas des modèles linéaires déterministes !**
(la relation entre $X$ et $Y$ n'est pas exacte)

**Exemple :** $X$ la taille et $Y$ le poids.
A 180 cm peuvent correspondre plusieurs poids :
75 kg, 85 kg, …
Les données ne sont plus alignées.
Pour deux poids identiques, nous avons deux tailles différentes.

# 3. Relation stochastique

**Une hypothèse raisonnable :** $X$ et $Y$ sont liés

**Dans l'exemple précédent :** plus un individu est grand, plus il est lourd

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

$\varepsilon$ : est une variable qui représente le comportement individuel.

# 3. Relation stochastique

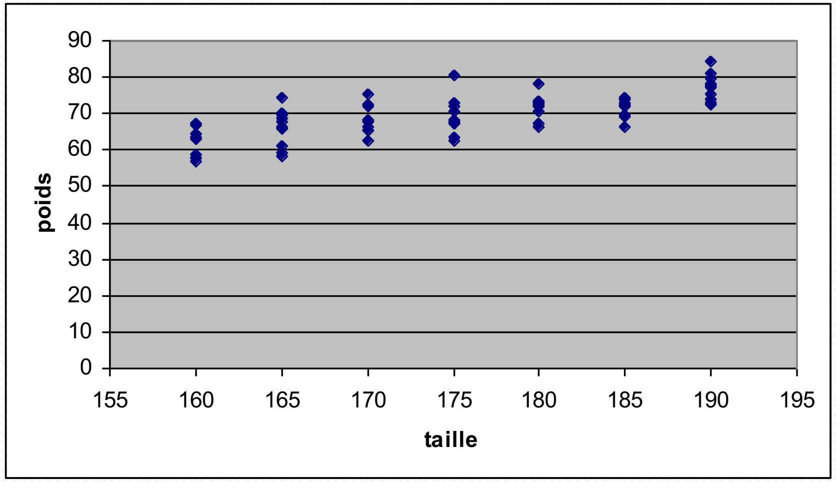
**Exemple :**

70 individus qui sont répartis de la façon suivante :

- 10 individus/taille
- 7 tailles (de 160 à 190 cm, pas de 5 cm).

# 3. Relation stochastique

| Observations | Taille | Poids |
|---|---|---|
| 1 | 160 | 57,9 |
| 2 | 160 | 58,9 |
| 3 | 160 | 63,3 |
| 4 | 160 | 56,8 |
| 5 | 160 | 66,8 |
| 6 | 160 | 64,5 |
| 7 | 160 | 67,1 |
| 8 | 160 | 58,0 |
| 9 | 160 | 62,9 |
| 10 | 160 | 57,7 |
| 11 | 165 | 68,5 |
| 12 | 165 | 69,8 |
| 13 | 165 | 58,5 |
| 14 | 165 | 66,3 |
| 15 | 165 | 65,8 |



# 3. Relation stochastique

**Commentaires :**

- Plusieurs $Y$ pour une même valeur de $X$.
  - ⇨ Modèle linéaire déterministe inadéquat.
- Cependant $Y$ augmente quand $X$ augmente.
  - ⇨ Modèle linéaire stochastique envisageable.

# 3. Relation stochastique

**Définition du modèle linéaire stochastique :**

$$\mu_Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$\mu_Y(x)$ : moyenne de $Y$ mesurée sur tous les individus pour lesquels $X$ vaut $x$.

# 3. Relation stochastique

**Remarques :**

- Comme $\varepsilon$, $\mu_Y(x)$ n'est ni observable, ni calculable.
- Pour calculer $\mu_Y(x)$, il faudrait recenser **tous** les individus de la population.

# 3. Relation stochastique

**Dans la pratique :**

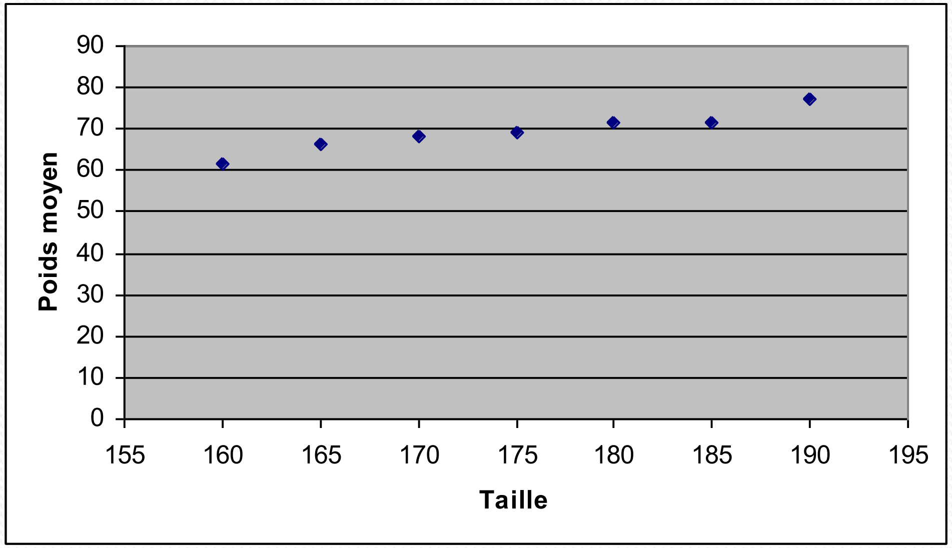
Nous estimons la moyenne théorique $\mu_Y(x)$ par la moyenne empirique de $Y$ définie par :

$$\overline{y}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i(x)$$

# 3. Relation stochastique

## Retour à l'exemple :

| Taille | Poids |
|---|---|
| 160 | 61,39 |
| 165 | 66,16 |
| 170 | 68,34 |
| 175 | 69,29 |
| 180 | 71,76 |
| 185 | 71,58 |
| 190 | 77,28 |



# 3. Relation stochastique

La droite que nous venons de tracer s'appelle :

**la droite de régression.**

*X* et *Y* ne jouent pas un rôle identique.

*X* explique *Y* ⇨ *X* est une variable indépendante (ou explicative) et *Y* est une variable dépendante (ou expliquée).

# 3. Relation stochastique

En analyse de régression linéaire :

$x_i$ est fixé
$y_i$ est aléatoire
la composante aléatoire d'un $y_i$ est le $\varepsilon_i$ correspondant.

# 3. Relation stochastique

Pour l'instant, la droite de régression est inconnue.

Tout le problème est d'estimer $\beta_0$ et $\beta_1$ à partir d'un échantillon de données.

# 3. Relation stochastique

**Choix des paramètres :** droite qui approche le mieux les données

⇨ introduction de $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ qui sont des estimateurs de $\beta_o$ et de $\beta_1$.

L'estimation de la droite de régression :

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

# 3. Relation stochastique

**Remarques :**

- $\hat{y}(x)$ est un estimateur de $\mu_Y(x)$
- Si le modèle est bon, $\hat{y}(x)$ est plus précis que

$$\overline{y}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i(x)$$

# 3. Relation stochastique

Lorsque $x = x_i$, alors $\hat{y}(x_i) = \hat{y}_i$, c'est-à-dire :

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

$\hat{y}_i$ est appelée la valeur estimée par le modèle.

# 3. Relation stochastique

Ces valeurs estiment les quantités inobservables :

$$\varepsilon_i = y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$$

par les quantités observables :

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

# 3. Relation stochastique

- Ces quantités $e_i$ = les résidus du modèle.
- La plupart des méthodes d'estimation : estimer la droite de régression par une droite qui minimise une fonction de résidus.
- La plus connue : la méthode des moindres carrés ordinaires.

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

**Méthode :** Définir des estimateurs qui minimisent la somme des carrés des résidus

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs sont donc les coordonnées du minimum de la fonction à deux variables :

$$z = f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

Cette fonction est appelée la **fonction objectif**.

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs correspondent aux valeurs annulant les dérivées partielles de cette fonction :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_0} = -2\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta_1} = -2\sum x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Les estimateurs sont les solutions du système :

$$-2\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$
$$-2\sum x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

Soient :

$$(4.1) \quad \sum y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i$$

$$(4.2) \quad \sum x_i y_i = \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Nous notons :

$$\overline{x}_n = \frac{\sum x_i}{n} \text{ et } \overline{y}_n = \frac{\sum y_i}{n}$$

D'après (4.1), nous avons :

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y}_n - \hat{\beta}_1 \overline{x}_n$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

A partir de (4.2), nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i - \hat{\beta}_0 n \bar{x}_n \\ &= \sum x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n + \hat{\beta}_1 n (\bar{x}_n)^2\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n}{\sum x_i^2 - n(\bar{x}_n)^2}$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

Comme nous avons :

$$\sum (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = \sum x_i y_i - n\bar{x}_n \bar{y}_n$$

$$\sum (x_i - \bar{x}_n)^2 = \sum x_i^2 - n(\bar{x}_n)^2$$

Ainsi nous obtenons :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sum (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

**Dans la pratique**, nous calculons $\hat{\beta}_1$ puis $\hat{\beta}_0$

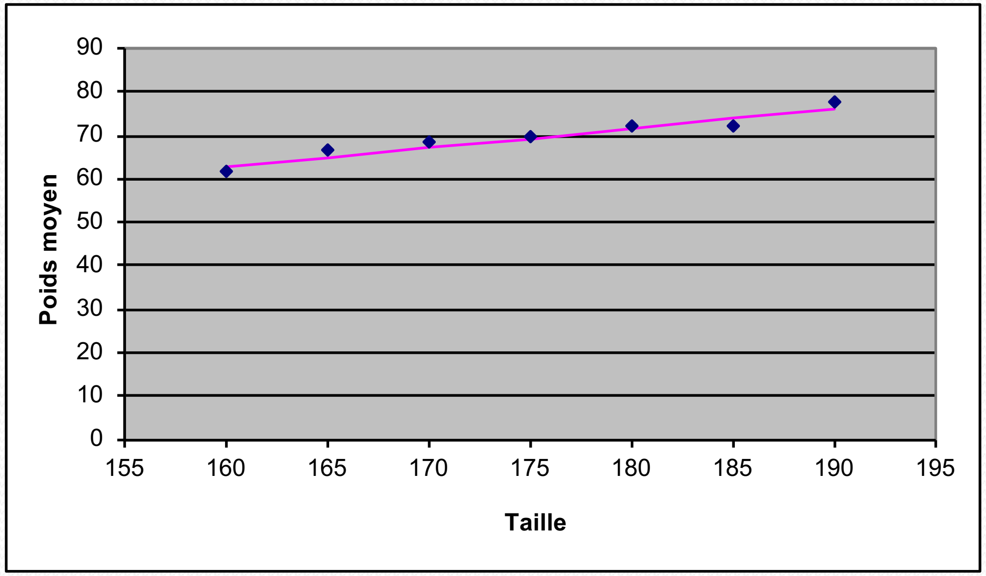
Nous obtenons une estimation de la droite de régression, appelée la **droite des moindres carrés ordinaires :**

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

# 4. Méthode des moindres carrés ordinaires

**Coefficients de la droite de moindres carrés :**

pente=0,442 ; ordonnée à l'origine=-8,012



## 5. Variation expliquée et inexpliquée

**But d'un modèle de régression linéaire :**

expliquer une partie de la variation de la variable expliquée $Y$.

La variation de $Y$ vient du fait de sa dépendance à la variable explicative $X$.

⇨ **Variation expliquée par le modèle.**

## 5. Variation expliquée et inexpliquée

Dans **l'exemple « taille-poids »**, nous avons remarqué que lorsque nous mesurons $Y$ avec une même valeur de $X$, nous observons une certaine variation sur $Y$.

⇨ **Variation inexpliquée par le modèle.**

# 5. Variation expliquée et inexpliquée

**Variation totale de *Y***

= Variation expliquée par le modèle

+ Variation inexpliquée par le modèle

# 5. Variation expliquée et inexpliquée

**Pour mesurer la variation de *Y* :** nous introduisons $\overline{y}_n$

$$(y_i - \overline{y}_n) = (\hat{y}_i - \overline{y}_n) + (y_i - \hat{y}_i)$$

**Différence expliquée par le modèle**

**Différence inexpliquée par le modèle ou résidu du modèle**

# 5. Variation expliquée et inexpliquée

**Pourquoi la méthode des moindres carrés ?**

- Un propriété remarquable : elle conserve une telle décomposition en considérant la somme des carrés de ces différences :

$$\sum (y_i - \overline{y}_n)^2 = \sum (\hat{y}_i - \overline{y}_n)^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

# 5. Variation expliquée et inexpliquée

$$\underbrace{\sum (y_i - \bar{y}_n)^2}_{\text{Somme des carrés totale } (SC_{tot})} = \underbrace{\sum (\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}_{\text{Somme des carrés due à la régression } (SC_{reg})} + \underbrace{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{Somme des carrés des résidus } (SC_{res})}$$

**Somme des carrés totale**

**($SC_{tot}$)**

**Somme des carrés due à la régression**

**($SC_{reg}$)**

**Somme des carrés des résidus**

**($SC_{res}$)**

## 5. Variation expliquée et inexpliquée

Mesure du pourcentage de la variation totale expliquée par le modèle :

Introduction d'un **coefficient de détermination**

$$R^2 = \frac{\text{Variation expliquée}}{\text{Variation totale}} = \frac{\mathrm{SC}_{\mathrm{reg}}}{\mathrm{SC}_{tot}}$$

# 5. Variation expliquée et inexpliquée

**Quelques remarques :**

- $R^2$ est compris entre 0 et 1.
- $R^2 = 1$ : cas où les données sont parfaitement alignées (comme c'est le cas pour un modèle déterministe).
- $R^2 = 0$ : cas où la variation de $Y$ n'est pas due à la variation de $X$. Les données ne sont pas du tout alignées.
- Plus $R^2$ est proche de 1, plus les données sont alignées sur la droite de régression.