FONCTIONS NON LINÉAIRES DE VARIABLES ALÉATOIRES

d'après *Éléments de statistiques* de Jean-Jacques Droesbeke

1. Introduction

On peut créer des lois en sommant, retranchant et combinant linéairement des variables aléatoires. D'autres modes d'agrégation peuvent être aussi retenus. Sans vouloir être guidé par un souci d'exhaustivité, nous devons mentionner quelques résultats dont nous ferons usage dans la suite. Il faut souligner, en préambule, que les différentes variables aléatoires ainsi créées répondent à l'origine à des objectifs précis que nous ne pouvons décrire ici, mais dont nous avons besoin dans notre cours.

2. Distribution "Khi-carré" (encore dite "du khi-carré)

Considérons ν variables aléatoires *normales centrées réduites indépendantes* $X_1, X_2, \cdots, X_\nu$. La variable aléatoire (v.a.)

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

admet **une loi** χ^2 **à** ν **degrés de liberté**, où **le nombre de degrés de liberté** ν représente le nombre de v.a. indépendantes qui interviennent dans la définition de X. On montre que

$$\mathbb{E}[X] = \nu, \quad \mathrm{Var}[X] = 2\nu.$$

On utilise souvent les *quantiles* $\chi_{\nu;p}$ d'ordre p, où $0 < p < 1$, définis par la relation

$$\mathbb{P}[X \leq \chi_{\nu;p}] = p.$$

3. Distribution de Student

Considérons 2 v.a. **indépendantes** $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2_\nu$. La v.a. obtenue en divisant X par la racine carrée de Y/ν amet une **"distribution de Student à** ν **degrés de**

liberté". Cette loi est généralement notée par t_ν :

$$\frac{X}{\sqrt{Y/\nu}} \sim t_\nu.$$

Sa fonction de densité a une allure très proche de celle de la variable normale centrée réduite.

D'autre part, on montre que

$$\mathbb{E}[X] = 0, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Remarque : La variance $\mathrm{Var}[X]$ n'est définie que si $\nu > 2$.

On peut utiliser les quantiles $t_{\nu;p}$ d'ordre p, où $0 < p < 1$ définis par la relation

$$\mathbb{P}[X \leq t_{\nu;p}] = p.$$

4. Distribution de Fisher-Snédecor

Considérons 2 variables **indépendantes** :

$$X_1 \sim \chi^2_{\nu_1} \quad \text{et} \quad X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}.$$

La v.a. définie par le rapport $(X_1/\nu_1)/(X_2/\nu_2)$ admet **une distribution de probabilité de Fisher-Snédecor**, à ν_1 et ν_2 degrés de liberté, ce que nous écrivons sous la forme :

$$X = \frac{X_1/\nu_1}{X_2\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}.$$

D'autre part, sa moyenne (qui n'existe que si $\nu_2 > 2$) et sa variance (qui n'existe que si $\nu_2 > 4$) ont pour valeurs respectives :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}.$$

On peut utiliser les quantiles $F_{\nu_1,\nu_2;p}$ d'ordre p de la variable F_{ν_1,ν_2}, définis par la relation

$$\mathbb{P}[X \leq F_{\nu_1,\nu_2;p}] = p.$$