RÉGRESSIONS LOGISTIQUES

MASTER 1

PLAN DU COURS

Régression logistique binaire simple (chd)

Régression logistique binaire multiple

- **données individuelles (faillite, bébé)**
- **données agrégées (job satisfaction)**

Régression logistique ordinale (bordeaux)

- **pentes égales**
- **partiellement à pentes égales**

Régression logistique multinomiale (bordeaux, alligator)

A. LA RÉGRESSION LOGISTIQUE BINAIRE

Les données

Y = variable à expliquer binaire

X_1,…, X_k = variables explicatives numériques ou binaires (indicatrices de modalités)

- Régression logistique binaire simple (k = 1)
- Régression logistique binaire multiple (k > 1)

I. LA RÉGRESSION LOGISTIQUE BINAIRE SIMPLE

Variable dépendante : Y = 0 ou 1

Variable indépendante : X quantitative ou binaire

Objectif : Modéliser

$$\pi(x) = \text{Prob}(Y = 1/X = x)$$

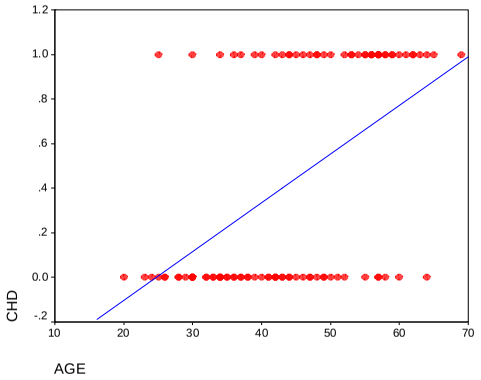
- Le modèle linéaire $\pi(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ convient mal lorsque X est continue.
- Le modèle logistique est plus naturel.

Exemple : Age and Coronary Heart Disease Status (CHD)

Les données

ID	AGRP	AGE	CHD
1	1	20	0
2	1	23	0
3	1	24	0
4	1	25	0
5	1	25	1
⋮	⋮	⋮	⋮
97	8	64	0
98	8	64	1
99	8	65	1
100	8	69	1

Plot of CHD by Age

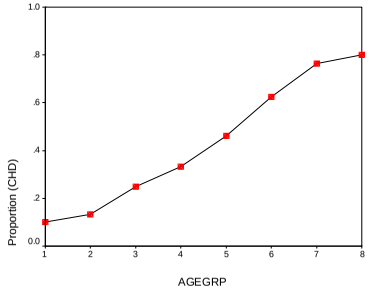


DESCRIPTION DES DONNÉES REGROUPÉES PAR CLASSE D'AGE

Tableau des effectifs
de CHD par classe d'âge

Age Group	n	CHD absent	CHD present	Mean (Proportion)
20–29	10	9	1	0.10
30–34	15	13	2	0.13
35–39	12	9	3	0.25
40–44	15	10	5	0.33
45–49	13	7	6	0.46
50–54	8	3	5	0.63
55 - 59	17	4	13	0.76
60 - 69	10	2	8	0.80
Total	100	57	43	0.43

Graphique des proportions
de CHD par classe d'âge



LE MODÈLE LOGISTIQUE

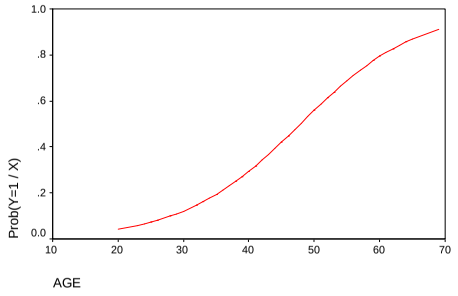
$$\pi(x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}$$

ou

$$Log\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Fonction de lien : Logit

Probabilité d'une maladie cardiaque
en fonction de l'age



FONCTIONS DE LIEN

- Fonction logit

$$g(p) = \log(p / (1 - p))$$

- Fonction normit ou probit

$$g(p) = \Phi^{-1}(p)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale réduite

- Fonction « complementary log-log »

$$g(p) = \log(-\log(1-p))$$

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE LOGISTIQUE

Les données

X	Y
x_1	y_1
⋮	⋮
x_i	y_i
⋮	⋮
x_n	y_n

$y_i = 1$ si caractère présent,
0 sinon

Le modèle

$$\pi(x_i) = P(Y = 1 / X = x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}$$

VRAISEMBLANCE DES DONNÉES

Probabilité d'observer les données

$[(x_1,y_1), \ldots, (x_i,y_i), \ldots, (x_n,y_n)]$

$$= \prod_{i=1}^{n} \text{Prob}(Y = y_i / X = x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)^{y_i}(1-\pi(x_i))^{1-y_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}\right)^{y_i} \left(\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}\right)^{1-y_i}$$

$$= \ell(\beta_0, \beta_1)$$

LOG-VRAISEMBLANCE

$$L(\beta_0,\beta_1) = Log(\ell(\beta_0,\beta_1)) = Log\left[\prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)^{y_i}(1-\pi(x_i)^{1-y_i}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i Log\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right) + Log(1-\pi(x_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i(\beta_0+\beta_1 x_i) - Log(1+\exp(\beta_0+\beta_1 x_i))$$

ESTIMATION DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

On cherche $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ **maximisant la Log-vraisemblance** $L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$.

La matrice $V(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} V(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$

est estimée par la matrice $\left[-\frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} \right]^{-1}_{\beta=\hat{\beta}}$

RÉSULTATS

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	107.353	.254	.341

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	AGE	.111	.024	21.254	1	.000	1.117
	Constant	-5.309	1.134	21.935	1	.000	.005

a. Variable(s) entered on step 1: AGE.

Test LRT pour $H_0 : \beta_1 = 0$

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Model	29.310	1	.000

RÉSULTATS

Estimated Covariance Matrix

Variable	Intercept	age
Intercept	1.285173	-0.02668
age	-0.02668	0.000579

Ecart-type de la constante = $1.285173^{1/2}$ = 1.134
Ecart-type de la pente = $.000579^{1/2}$ = .024
Covariance entre la constante et la pente = -.02668

TEST DE WALD

Le modèle $\pi(x) = P(Y = 1 / X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$

Test $\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$

Statistique utilisée $Wald = \frac{\hat{\beta}_1^2}{s_1^2}$

Décision de rejeter H_0 au risque α

Rejet de H_0 si $Wald \geq \chi^2_{1-\alpha}(1)$ ou $NS = P(\chi^2(1) \geq Wald) \leq \alpha$

TEST LRT

Le modèle $$\pi(x) = P(Y = 1/X = x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}$$

Test $$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Statistique utilisée $$\Lambda = [-2L(Cste)] - [-2L(Cste, X)]$$

Décision de rejeter H_0 au risque α

Rejet de H_0 si $\Lambda \geq \chi^2_{1-\alpha}(1)$ ou $NS = P(\chi^2(1) \geq \Lambda) \leq \alpha$

INTERVALLE DE CONFIANCE DE π(X) AU NIVEAU 95%

De

$$Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x) = Var(\hat{\beta}_0) + x^2 Var(\hat{\beta}_1) + 2x Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$$

on déduit l'intervalle de confiance de $\pi(x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}$

$$\left[\frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x - 1.96\sqrt{Var(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x)}}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x - 1.96\sqrt{Var(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x)}}} ; \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x + 1.96\sqrt{Var(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x)}}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x + 1.96\sqrt{Var(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x)}}} \right]$$

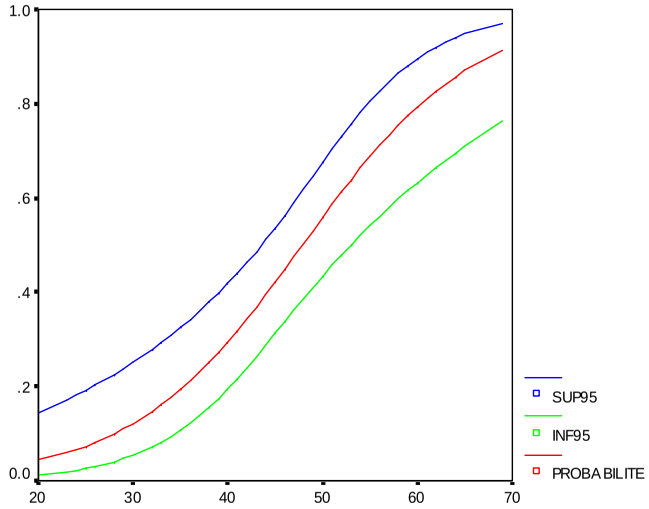
INTERVALLE DE CONFIANCE DE π(X) AU NIVEAU 95%

Case Summaries[a]

	AGE	PROBABILITE CALCULE	INF95	SUP95
1	20.0	.04	.01	.14
2	23.0	.06	.02	.17
3	24.0	.07	.02	.18
4	25.0	.07	.03	.19
5	25.0	.07	.03	.19
6	26.0	.08	.03	.20
7	26.0	.08	.03	.20
8	28.0	.10	.04	.23
9	28.0	.10	.04	.23
10	29.0	.11	.05	.24
11	30.0	.12	.05	.25
12	30.0	.12	.05	.25
13	30.0	.12	.05	.25
14	30.0	.12	.05	.25
15	30.0	.12	.05	.25
16	30.0	.12	.05	.25
17	32.0	.15	.07	.28
18	32.0	.15	.07	.28
19	33.0	.16	.08	.29
20	33.0	.16	.08	.29
21	34.0	.18	.09	.31
22	34.0	.18	.09	.31
23	34.0	.18	.09	.31
24	34.0	.18	.09	.31
25	34.0	.18	.09	.31
26	35.0	.19	.11	.33
27	35.0	.19	.11	.33
28	36.0	.21	.12	.34
29	36.0	.21	.12	.34
30	36.0	.21	.12	.34
Total N	30	30	30	30

a. Limited to first 30 cases.

INTERVALLE DE CONFIANCE DE π(X) AU NIVEAU 95%



Comparaison entre les proportions observées et théoriques

Proportion observée :

$$\sum_{i \in Classe} y_i / n_{Classe}$$

Proportion théorique :

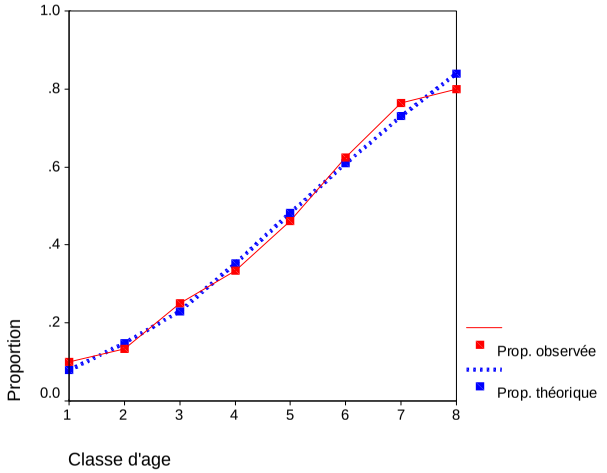
$$\sum_{i \in Classe} \hat{\pi}_i / n_{Classe}$$

puisque $E(y_i) = \pi_i$
estimé par $\hat{\pi}_i$

Report

AGEGRP		Maladie cardiaque	Predicted probability
1	Mean	.1000	.0787086
	N	10	10
2	Mean	.1333	.1484562
	N	15	15
3	Mean	.2500	.2299070
	N	12	12
4	Mean	.3333	.3519639
	N	15	15
5	Mean	.4615	.4824845
	N	13	13
6	Mean	.6250	.6087623
	N	8	8
7	Mean	.7647	.7302152
	N	17	17
8	Mean	.8000	.8391673
	N	10	10
Total	Mean	.4300	.4300000
	N	100	100

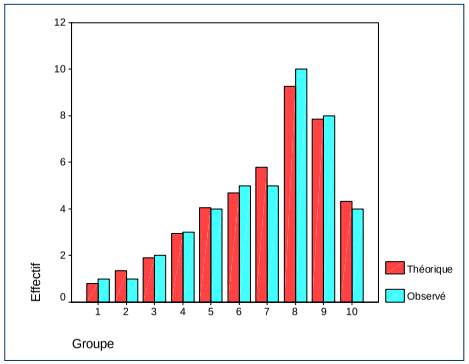
Comparaison entre les proportions observées et théoriques



TEST DE HOSMER & LEMESHOW (GOODNESS OF FIT TEST)

Les données sont rangées par ordre croissant des probabilités

calculées à l'aide du modèle, puis partagées en 10 groupes au plus. *Ce test est malheureusement peu puissant*.



Le test du khi-deux est utilisé pour comparer les effectifs observés ($\sum_{i \in Classe} y_i$) aux effectifs théoriques ($\sum_{i \in Classe} \hat{\pi}_i$).

Nb de degrés de liberté = Nb de groupes - 2

TEST DE HOSMER & LEMESHOW

Contingency Table for Hosmer and Lemeshow Test

		Maladie cardiaque = chd=no		Maladie cardiaque = chd=yes		
		Observed	Expected	Observed	Expected	Total
Step 1	1	9	9.213	1	.787	10
	2	9	8.657	1	1.343	10
	3	8	8.095	2	1.905	10
	4	8	8.037	3	2.963	11
	5	7	6.947	4	4.053	11
	6	5	5.322	5	4.678	10
	7	5	4.200	5	5.800	10
	8	3	3.736	10	9.264	13
	9	2	2.134	8	7.866	10
	10	1	.661	4	4.339	5

Hosmer and Lemeshow Test

Step	Chi-square	df	Sig.
1	.890	8	.999

MESURE DE LA QUALITÉ DE LA MODÉLISATION

R^2 de Cox & Snell

$$R^2 = 1 - [\frac{\ell(cte)}{\ell(cte, X)}]^{\frac{2}{n}}$$

Pseudo R2 (McFadden)

$$Pseudo - R^2 = 1 - [\frac{-2L(cte, X)}{-2L(cte)}]$$

$$Max\ R^2 = 1 - [\ell(cte)]^{\frac{2}{n}}$$

R^2 ajusté de Nagelkerke

$$R^2_{adj} = \frac{R^2}{R^2_{max}}$$

TABLEAU DE CLASSIFICATION

Une observation i est affectée à la classe [Y=1] si

$\hat{\pi}_i \geq$ **c.**

Tableau de classification (c = 0.5)

TABLE OF CHD BY PREDICTS

CHD PREDICTS

Frequency	0	1	Total
0	45	12	57
1	14	29	43
Total	59	41	100

Sensibilité = 29/43

Spécificité = 45/57

taux de faux positifs = 12/41

taux de faux négatifs = 14/59

OBJECTIFS

Sensibilité = capacité à diagnostiquer les malades parmi les malades

Spécificité = capacité à reconnaître les non-malades parmi les non-malades

1 - Spécificité = risque de diagnostiquer un malade chez les non-malades.

Trouver un compromis acceptable entre forte sensibilité et forte spécificité.

GRAPHIQUE ROC (RECEIVER OPERATING CHARACTERISTIC)

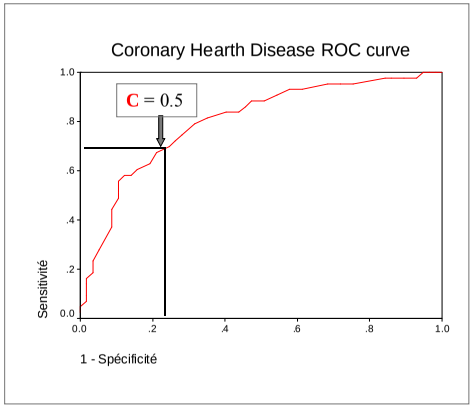
<u>Sensibilité</u> : capacité à prédire un évènement

<u>Spécificité</u> : capacité à prédire un non-événement

<u>Graphique ROC</u> :

y = Sensibilité(c)

x = 1 - Spécificité (c)



L'aire sous la courbe ROC est une mesure du pouvoir prédictif de la variable X. Ici cette surface est égale à 0.8.

COEFFICIENTS D 'ASSOCIATION ENTRE LES PROBABILITÉS CALCULÉES ET LES RÉPONSES OBSERVÉES

N = effectif total

t = nombre de paires avec des réponses différentes

= nb(0)*nb(1)

nc = nombre de paires concordantes ($y_i < y_j$ et $\hat{\pi}_i < \hat{\pi}_j$)

nd = nombre de paires discordantes ($y_i < y_j$ et $\hat{\pi}_i > \hat{\pi}_j$)

t - nc - nd = Nb d'ex-aequo ($y_i < y_j$ et $\hat{\pi}_i = \hat{\pi}_j$)

D de Somer = (nc - nd) / t

Gamma = (nc - nd) / (nc + nd)

Tau-a = (nc - nd) / (.5N(N-1))

c = (nc + .5(t - nc - nd)) / t

c = aire sous la courbe ROC

Analyse des résidus données individuelles

Résidu de Pearson (Standardized Residual)

$$r_i = \frac{y_i - \hat{\pi}_i}{\sqrt{\hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)}}$$

à comparer à 2 en valeur absolue

Autres statistiques pour l'analyse des résidus

Déviance : $D = -2\log\ell = \sum d_i^2$

Résidu déviance (Deviance)

$$d_i = \text{signe}(y_i - \hat{\pi}_i)\sqrt{-2\log(\text{Prob}_{\text{estimée}}[Y = y_i / X = x_i]}$$

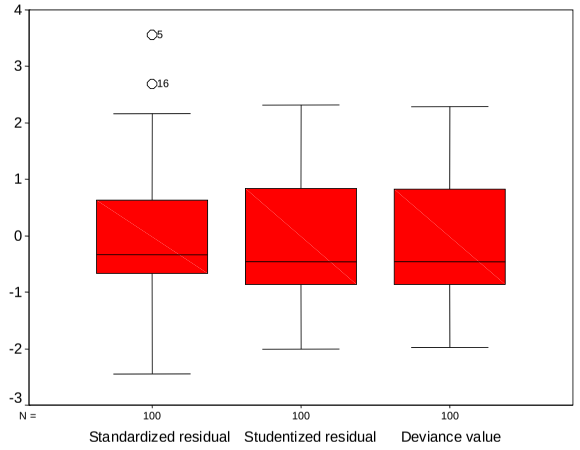
à comparer à 2 en valeur absolue

Influence de chaque observation sur la déviance (DifDev)

$\Delta_i D$ = D(toutes les obs.) - D(toutes les obs. sauf l'obs. i)

Studentized residual : $\text{signe}(y_i - \hat{\pi}_i)\sqrt{\Delta D_i}$

ANALYSE DES RÉSIDUS



II. LA RÉGRESSION LOGISTIQUE MULTIPLE

EXEMPLE : PRÉVISION DE FAILLITE

Les données

Les ratios suivants sont observés sur 46 entreprises :

- X_1 = Flux de trésorerie / Dette totale
- X_2 = Resultat net / Actif
- X_3 = Actif à court terme / Dette à court terme
- X_4 = Actif à court terme / Ventes
- Y = F si faillite, NF sinon

Deux ans après 21 de ces entreprises ont fait faillite et 25 sont restées en bonne santé financière.

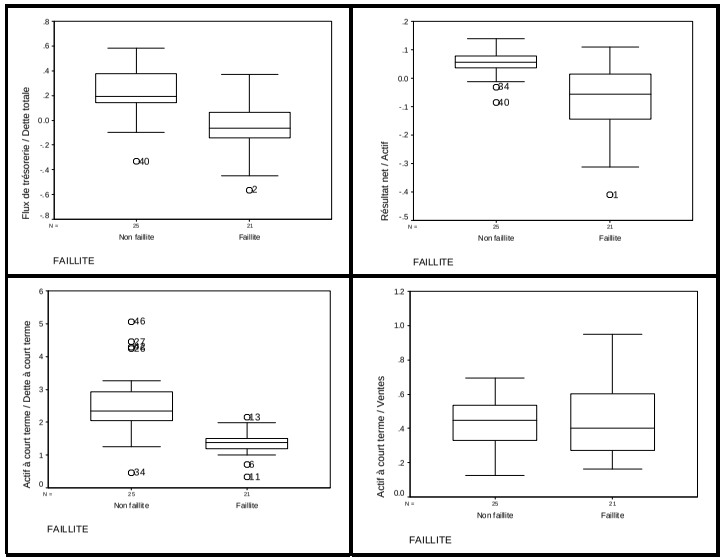
LES DONNÉES DES ENTREPRISES

Case Summaries [a]

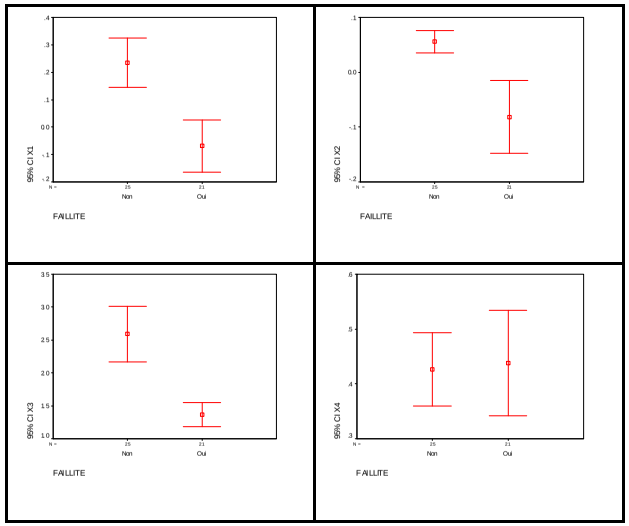
	cash flow / total debt	net income / total assets	current assets / current liabilities	current assets / net sales	FAILLITE
1	-.45	-.41	1.09	.45	F
2	-.56	-.31	1.51	.16	F
3	.06	.02	1.01	.40	F
4	-.07	-.09	1.45	.26	F
5	-.10	-.09	1.56	.67	F
6	-.14	-.07	.71	.28	F
7	.04	.01	1.50	.71	F
8	-.07	-.06	1.37	.40	F
9	.07	-.01	1.37	.34	F
10	-.14	-.14	1.42	.43	F
11	-.23	-.30	.33	.18	F
12	.07	.02	1.31	.25	F
13	.01	.00	2.15	.70	F
14	-.28	-.23	1.19	.66	F
15	.15	.05	1.88	.27	F
16	.37	.11	1.99	.38	F
17	-.08	-.08	1.51	.42	F
18	.05	.03	1.68	.95	F
19	.01	.00	1.26	.60	F
20	.12	.11	1.14	.17	F
21	-.28	-.27	1.27	.51	F
22	.51	.10	2.49	.54	NF
23	.08	.02	2.01	.53	NF
24	.38	.11	3.27	.35	NF
25	.19	.05	2.25	.33	NF
26	.32	.07	4.24	.63	NF
27	.31	.05	4.45	.69	NF
28	.12	.05	2.52	.69	NF
29	-.02	.02	2.05	.35	NF
30	.22	.08	2.35	.40	NF
31	.17	.07	1.80	.52	NF
32	.15	.05	2.17	.55	NF
33	-.10	-.01	2.50	.58	NF
34	.14	-.03	.46	.26	NF
35	.14	.07	2.61	.52	NF
36	.15	.06	2.23	.56	NF
37	.16	.05	2.31	.20	NF
38	.29	.06	1.84	.38	NF
39	.54	.11	2.33	.48	NF
40	-.33	-.09	3.01	.47	NF
41	.48	.09	1.24	.18	NF
42	.56	.11	4.29	.44	NF
43	.20	.08	1.99	.30	NF
44	.47	.14	2.92	.45	NF
45	.17	.04	2.45	.14	NF
46	.58	.04	5.06	.13	NF

a. Limited to first 100 cases.

Boîtes à moustaches des ratios financiers selon le critère de Faillite



Intervalle de confiance des moyennes des ratios financiers selon le critère de Faillite



RÉGRESSIONS LOGISTIQUES SIMPLES DE Y SUR LES RATIOS X

Variable	*Coefficient* $\hat{\beta}_1$	*WALD*	*NS*	R^2 *de Nagelkerke*
X_1	-7.526	9.824	.002	.466
X_2	-19.493	8.539	.003	.466
X_3	-3.382	11.75	.001	.611
X_4	.354	.040	.841	.001

NS < .05 ➔ Prédicteur significatif

Le modèle de la régression logistique

Le modèle

$$\pi(x) = P(Y = F / X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_4 x_4}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_4 x_4}}$$

VRAISEMBLANCE DES DONNÉES

Probabilité d'observer les données

$$[(x_1,y_1), \ldots, (x_i,y_i), \ldots, (x_n,y_n)]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \text{Prob}(Y = y_i / X = x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i)^{y_i} (1 - \pi(x_i))^{1-y_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{\beta_0 + \sum_j \beta_j x_j}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_j \beta_j x_j}}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{e^{\beta_0 + \sum_j \beta_j x_j}}{1 + e^{\beta_0 + \sum_j \beta_j x_j}}\right)^{1-y_i}$$

$$= \ell(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_4)$$

RÉSULTATS

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	27.443	.543	.725

	Collinearity Statistics	
	Tolerance	VIF
X1	0.212	4.725
X2	0.252	3.973
X3	0.635	1.575
X4	0.904	1.106

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	X1	-7.138	6.002	1.414	1	.234	.001
	X2	3.703	13.670	.073	1	.786	40.581
	X3	-3.415	1.204	8.049	1	.005	.033
	X4	2.968	3.065	.938	1	.333	19.461
	Constant	5.320	2.366	5.053	1	.025	204.283

a. Variable(s) entered on step 1: X1, X2, X3, X4.

RÉSULTATS

Correlations

		X1	X2	X3	X4
X1	Pearson Correlation	1	.858**	.571**	-.053
	Sig. (2-tailed)	.	.000	.000	.725
	N	46	46	46	46
X2	Pearson Correlation	.858**	1	.471**	.055
	Sig. (2-tailed)	.000	.	.001	.717
	N	46	46	46	46
X3	Pearson Correlation	.571**	.471**	1	.154
	Sig. (2-tailed)	.000	.001	.	.306
	N	46	46	46	46
X4	Pearson Correlation	-.053	.055	.154	1
	Sig. (2-tailed)	.725	.717	.306	.
	N	46	46	46	46

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Le modèle estimé

$$\text{Prob}(Y = F / X) = \frac{e^{5.320 - 7.138 \times X_1 + 3.703 \times X_2 - 3.415 \times X_3 + 2.968 \times X_4}}{1 + e^{5.320 - 7.138 \times X_1 + 3.703 \times X_2 - 3.415 \times X_3 + 2.968 \times X_4}}$$

Prévision de faillite

Classification Table[a]

Observed		Predicted		
		FAILLITE		Percentage Correct
		NF	F	
SITUATION	NF	24	1	96.0
	F	3	18	85.7
Overall Percentage				91.3

a. The cut value is .500

TEST DE HOSMER & LEMESHOW

Hosmer and Lemeshow Test

Step	Chi-square	df	Sig.
1	5.201	7	.636

Contingency Table for Hosmer and Lemeshow Test

		FAILLITE = Non		FAILLITE = Oui		Total
		Observed	Expected	Observed	Expected	
Step 1	1	5	4.999	0	.001	5
	2	5	4.906	0	.094	5
	3	4	4.613	1	.387	5
	4	5	4.143	0	.857	5
	5	4	3.473	1	1.527	5
	6	1	1.762	4	3.238	5
	7	0	.667	5	4.333	5
	8	1	.340	4	4.660	5
	9	0	.098	6	5.902	6

RÉGRESSION LOGISTIQUE PAS À PAS DESCENDANTE

Sans X_2

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	27.516	.542	.724

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	X1	-5.772	3.005	3.690	1	.055	.003
	X3	-3.289	1.085	9.183	1	.002	.037
	X4	2.979	3.025	.970	1	.325	19.675
	Constant	5.038	2.060	5.983	1	.014	154.193

a. Variable(s) entered on step 1: X1, X3, X4.

RÉGRESSION LOGISTIQUE PAS À PAS DESCENDANTE

Sans X_4

Model Summary

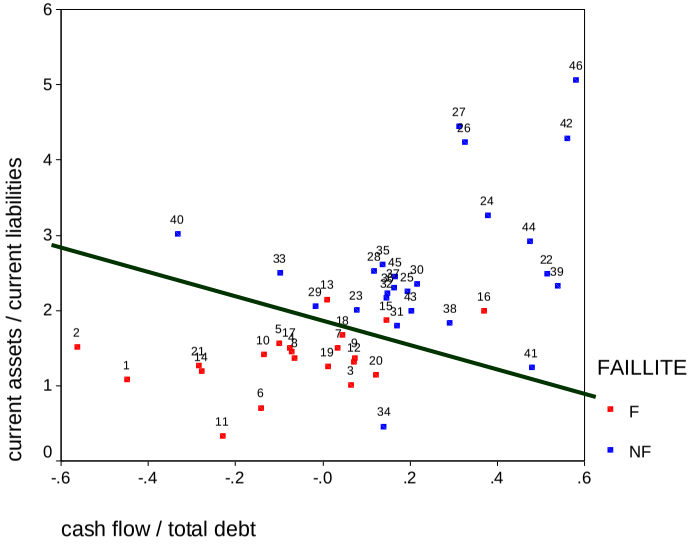
Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	28.636	.531	.709

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	X1	-6.556	2.905	5.092	1	.024	.001
	X3	-3.019	1.002	9.077	1	.003	.049
	Constant	5.940	1.986	8.950	1	.003	379.996

a. Variable(s) entered on step 1: X1, X3.

CARTE DES ENTREPRISES DANS LE PLAN (X_1, X_3)



ÉQUATION DE LA DROITE FRONTIÈRE

$$\text{Prob}(Y = F / X) = \frac{e^{5.940 - 6.556 \times X_1 - 3.019 \times X_3}}{1 + e^{5.940 - 6.556 \times X_1 - 3.019 \times X_2}} = 0.5$$

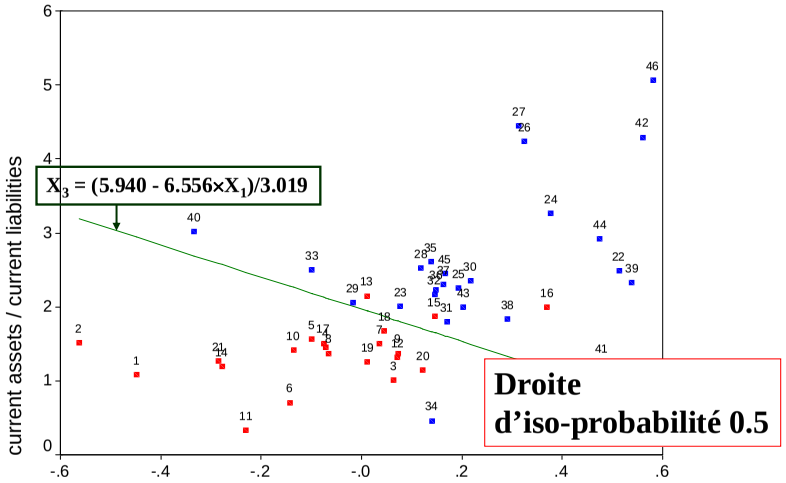
$$\Leftrightarrow$$

$$5.940 - 6.556 \times X_1 - 3.019 \times X_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$X_3 = (5.940 - 6.556 \times X_1)/3.019$$

Carte des entreprises dans le plan (x_1, x_3) avec la droite frontière issue de la régression logistique



EXEMPLE II : LOW BIRTH WEIGHT BABY (HOSMER & LEMESHOW)

Y = 1 si le poids du bébé < 2 500 grammes,

= 0 sinon

$n_1 = 59$, $n_0 = 130$

Facteurs de risque :

- **Age**
- **LWT (Last Menstrual Period Weight)**
- **Race (White, Black, Other)**
- **FTV (Nb of First Trimester Physician Visits)**
- **Smoke (1 = YES, 0 = NO)**

Résultats

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	214.575	.101	.142

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	AGE	-.022	.035	.410	1	.522	.978
	LWT	-.012	.006	3.762	1	.052	.988
	WHITE	-.941	.418	5.070	1	.024	.390
	BLACK	.289	.527	.301	1	.583	1.336
	FTV	-.008	.164	.002	1	.962	.992
	SMOKE	1.053	.381	7.637	1	.006	2.866
	Constant	1.269	1.023	1.539	1	.215	3.558

a. Variable(s) entered on step 1: AGE, LWT, WHITE, BLACK, FTV, SMOKE.

Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	AGE	.884	1.132
	weight last menstrual period	.869	1.150
	smoking during pregnancy	.865	1.156
	n° physician visits first trimester	.939	1.065
	WHITE	.686	1.457
	BLACK	.743	1.346

a. Dependent Variable: low birth weight

Aucun problème de multicolinéarité

Validité du modèle

Test de Hosmer et Lemeshow

Hosmer and Lemeshow Test

Step	Chi-square	df	Sig.
1	11.825	8	.159

Contingency Table for Hosmer and Lemeshow Test

		low birth weight = weight > 2500 g		low birth weight = weight < 2500 g		
		Observed	Expected	Observed	Expected	Total
Step 1	1	19	17.278	0	1.722	19
	2	17	16.411	2	2.589	19
	3	14	15.454	5	3.546	19
	4	12	13.955	7	5.045	19
	5	16	13.041	3	5.959	19
	6	12	12.599	7	6.401	19
	7	9	12.084	10	6.916	19
	8	9	11.569	10	7.431	19
	9	13	10.715	6	8.285	19
	10	9	6.888	9	11.112	18

ODDS-RATIO

$$\text{Odds} - \text{Ratio(Smoke)}$$

$$= \frac{\text{Prob}(Y = 1 / X, \text{Smoke} = \text{yes}) / \text{Prob}(Y = 0 / X, \text{Smoke} = \text{yes})}{\text{Prob}(Y = 1 / X, \text{Smoke} = \text{no}) / \text{Prob}(Y = 0 / X, \text{Smoke} = \text{no})}$$

$$= \exp(\beta_{\text{Smoke}})$$

Pour un événement rare l'odds-ratio est peu différent du risque relatif défini par :

$$\text{Risque Relatif} = \frac{\text{Prob}(Y = 1 / X, \text{Smoke} = \text{yes})}{\text{Prob}(Y = 1 / X, \text{Smoke} = \text{no})}$$

INTERVALLE DE CONFIANCE DE L'ODDS-RATIO AU NIVEAU 95%

De

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{\mathrm{Smoke}}) = s^2_{\mathrm{Smoke}}$$

on déduit l'intervalle de confiance de OR(Smoke) :

$$\left[e^{\hat{\beta}_{\mathrm{Smoke}} - 1.96 s_{\mathrm{Smoke}}} \;,\; e^{\hat{\beta}_{\mathrm{Smoke}} + 1.96 s_{\mathrm{Smoke}}} \right]$$

INTERVALLE DE CONFIANCE DE L'ODDS-RATIO AU NIVEAU 95%

Variables in the Equation

		B	Exp(B)	95.0% C.I.for EXP(B)	
				Lower	Upper
Step 1[a]	AGE	-.022	.978	.914	1.047
	LWT	-.012	.988	.975	1.000
	WHITE	-.941	.390	.172	.885
	BLACK	.289	1.336	.475	3.755
	FTV	-.008	.992	.719	1.369
	SMOKE	1.053	2.866	1.358	6.046
	Constant	1.269	3.558		

a. Variable(s) entered on step 1: AGE, LWT, WHITE, BLACK, FTV, SMOKE.

INFLUENCE D'UN GROUPE DE VARIABLES

Le modèle

$$\pi(x) = P(Y = 1 / X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k}}$$

Test

$H_0 : \beta_{r+1} = \ldots = \beta_k = 0$
$H_1 :$ au moins un $\beta_j \neq 0$

- Proc GENMOD (type 3)
- Régression backwardLR avec Removal = 1 dans SPSS

Statistiques utilisées

1. Λ = [-2L(Modèle simplifié)] - [-2L(Modèle complet)]

2. $$\mathrm{Wald} = (\hat{\beta}_{r+1}, \ldots, \hat{\beta}_k) \left[\mathrm{Var} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{r+1} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{r+1} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$$

- Proc Logistic
- Proc Genmod (type 3 et wald)
- SPSS

RÈGLE DE DÉCISION

On rejette

$$H_0 : \beta_{r+1} = \ldots = \beta_k = 0$$

au risque α de se tromper si

$$\Lambda \text{ ou Wald} \geq \chi^2_{1-\alpha}[k - r]$$

ou si

$$\text{NS} = \text{Prob}\left(\chi^2[k - r] \geq \text{Wald ou } \Lambda \right) \leq \alpha$$

TEST DU FACTEUR RACE (WALD)

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	AGE	-.022	.035	.410	1	.522	.978
	LWT	-.012	.006	3.762	1	.052	.988
	RACE			7.784	2	.020	
	RACE(1)	-.941	.418	5.070	1	.024	.390
	RACE(2)	.289	.527	.301	1	.583	1.336
	SMOKE	1.053	.381	7.637	1	.006	2.866
	FTV	-.008	.164	.002	1	.962	.992
	Constant	1.269	1.023	1.539	1	.215	3.558

a. Variable(s) entered on step 1: AGE, LWT, RACE, SMOKE, FTV.

Modèle sans le facteur Race :

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	222.815	.061	.086

TEST DU FACTEUR RACE (LRT)

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	214.575[a]	.000	0	.
AGE	214.990	.415	1	.520
LWT	218.746	4.171	1	.041
SMOKE	222.573	7.998	1	.005
FTV	214.577	.002	1	.963
RACE	222.815	8.239	2	.016

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

a. This reduced model is equivalent to the final model because omitting the effect does not increase the degrees of freedom.

Test de l'hypothèse linéaire générale

Le modèle

$$\pi(x) = P(Y = 1/X = x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\ldots+\beta_k x_k}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\ldots+\beta_k x_k}}$$

Test

$$H_0 : C(\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_k)' = 0$$
$$H_1 : C(\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_k)' \neq 0$$

Statistiques utilisées

1. $\Lambda = [-2L(H_0)] - [-2L(H_1)]$ — Proc GENMOD

2. $\text{Wald} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k) C' \left[CVar\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k\end{pmatrix} C' \right]^{-1} C \begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k\end{pmatrix}$ — Proc Logistic, Proc Genmod

Règle de décision

On rejette

$$H_0 : C(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)' = 0$$

au risque α de se tromper si

$$\Lambda \text{ ou Wald} \geq \chi^2_{1-\alpha}[\text{rang}(L)]$$

ou si

$$NS = \text{Prob}(\chi^2[\text{rang}(L)] \geq \text{Wald ou } \Lambda) \leq \alpha$$

La régression logistique pas-à-pas descendante

- On part du modèle complet.
- A chaque étape, on enlève la variable ayant le Wald le moins significatif (plus fort niveau de signification) à condition que son niveau de signification soit supérieur à 10 % .

Test du Score pour la variable X_j

Modèle

$$\text{Prob}(Y=1/x)=\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_tx_t+\beta_jx_j}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_tx_t+\beta_jx_j}}$$

Test $H_0 : \beta_j = 0$ vs $H_1 : \beta_j \neq 0$

Statistique

$$\chi^2_{Score}=\left[\frac{\partial L}{\partial\beta}\right]'_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2}\right]^{-1}_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}\left[\frac{\partial L}{\partial\beta}\right]_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}$$

suit une loi du khi-deux à 1 degré de liberté sous H_0.

$\frac{\partial L}{\partial\beta}$ est calculé sur le modèle à t+1 variables.

Test du Score pour les variables hors modèle

Modèle

$$\text{Prob}(Y=1/x)=\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_tx_t+\beta_{t+1}x_{t+1}+\ldots+\beta_kx_k}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_tx_t+\beta_{t+1}x_{t+1}+\ldots+\beta_kx_k}}$$

Test $H_0 : \beta_{t+1}=\ldots=\beta_k=0$ vs H_1 : au moins un $\beta_j \neq 0$

Statistique

$$\chi^2_{Score}=\left[\frac{\partial L}{\partial\beta}\right]'_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]^{-1}_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}\left[\frac{\partial L}{\partial\beta}\right]_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}$$

suit une loi du khi-deux à k-t degré de liberté sous H_0.

$\frac{\partial L}{\partial\beta}$ est calculé sur le modèle à k variables.

RÉGRESSION LOGISTIQUE MULTIPLE (DONNÉES AGRÉGÉES)

Exemple : Job satisfaction (Models for discrete data, D. Zelterman, Oxford Science Publication, 1999)

9949 employees in the ‘ craft ’ job (travail manuel) within a company

Response : Satisfied/Dissatisfied

Factors :
- **Sex (1=F, 0=M)**
- **Race (White=1, Nonwhite=0)**
- **Age (<35, 35-44, >44)**
- **Region (Northeast, Mid-Atlantic, Southern, Midwest, Northwest, Southwest, Pacific)**

Explain Job satisfaction with all the main effects and the interactions.

Job satisfaction (Y/N) by sex (M/F), race, age, and region of residence for employees of a large U.S. corporation

	White						Nonwhite					
	Under 35		35-44		Over 44		Under 35		35-44		Over 44	
Region	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Northeast												
Y	288	60	224	35	337	70	38	19	32	22	21	15
N	177	57	166	19	172	30	33	35	11	20	8	10
Mid-Atlantic												
Y	90	19	96	12	124	17	18	13	7	0	9	1
N	45	12	42	5	39	2	6	7	2	3	2	1
Southern												
Y	226	88	189	44	156	70	45	47	18	13	11	9
N	128	57	117	34	73	25	31	35	3	7	2	2
Midwest												
Y	285	110	225	53	324	60	40	66	19	25	22	11
N	179	93	141	24	140	47	25	56	11	19	2	12
Northwest												
Y	270	176	215	80	269	110	36	25	9	11	16	4
N	180	151	108	40	136	40	20	16	7	5	3	5
Southwest												
Y	252	97	162	47	199	62	69	45	14	8	14	2
N	126	61	72	27	93	24	27	36	7	4	5	0
Pacific												
Y	119	62	66	20	67	25	45	22	15	10	8	6
N	58	33	20	10	21	10	16	15	10	8	6	2

UTILISATION DE LA PROC LOGISTIC

```
data job;
input sat nsat race age sex region;
label
        sat     =       'satisfied with job'
        nsat    =       'dissatisfied'
        race    =       '0=non-white, 1=white'
        age     =       '3 age groups'
        sex     =       '0=M, 1=F'
        region  =       '7 regions'
        total   =       'denominator';
total = sat+nsat;
propsat = sat/total;
cards;
288 177 1 0 0 0
 90  45 1 0 0 1
226 128 1 0 0 2
        .
        .
  2   0 0 2 1 5
  6   2 0 2 1 6
;
```


UTILISATION DE LA PROC LOGISTIC

```
proc logistic data=job;
class race age sex region/param=effect;
model sat/total = race age sex region race*age
                  race*sex race*region age*sex
                  age*region sex*region
                  /selection = forward
                   hierarchy = none ;
run;
```


RÉSULTAT DE LA PROC LOGISTIC (OPTION FORWARD ET HIERARCHY =NONE)

Type III Analysis of Effects

Effect	DF	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
race	1	0.1007	0.7510
age	2	50.7100	<.0001
sex	1	14.0597	0.0002
region	6	37.7010	<.0001
race*sex	1	7.5641	0.0060
age*sex	2	5.9577	0.0509

UTILISATION DE LA PROC LOGISTIC AVEC L 'OPTION PARAM=EFFECT

Analysis of Maximum Likelihood Estimates

Parameter		DF	Estimate	Standard Error	Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept		1	0.6481	0.0346	350.2297	<.0001
race	0	1	-0.0099	0.0312	0.1007	0.7510
age	0	1	-0.1952	0.0316	38.2459	<.0001
age	1	1	-0.0227	0.0375	0.3675	0.5444
sex	0	1	0.1230	0.0328	14.0597	0.0002
region	0	1	-0.2192	0.0469	21.8470	<.0001
region	1	1	0.2228	0.0820	7.3832	0.0066
region	2	1	-0.0446	0.0527	0.7159	0.3975
region	3	1	-0.1291	0.0462	7.8133	0.0052
region	4	1	-0.0927	0.0472	3.8616	0.0494
region	5	1	0.0704	0.0531	1.7565	0.1851
race*sex	0 0	1	0.0856	0.0311	7.5641	0.0060
age*sex	0 0	1	0.0768	0.0315	5.9428	0.0148
age*sex	1 0	1	-0.0342	0.0375	0.8352	0.3608

CALCUL ET TEST DES DERNIERS COEFFICIENTS

```
proc logistic data=job;
class race age sex region/param=effect;
model sat/total = race age sex region
                  race*sex age*sex ;
contrast 'Age >44' age -1 -1/estimate = parm;
contrast 'Pacific' region -1 -1 -1 -1 -1 -1/
                   estimate=parm;
contrast 'Age>44,Homme' age*sex -1 -1/
                   estimate=parm;
run;
```


RÉSULTATS

Contrast Rows Estimation and Testing Results

Contrast	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Age >44	0.2180	0.0375	0.1444	<.0001
Pacific	0.1924	0.0751	0.0453	0.0104
Age>44,Homme	-0.0425	0.0375	-0.1159	0.2565

UTILISATION DE LA PROC LOGISTIC AVEC L 'OPTION PARAM=EFFECT

$$\text{Logit}(\text{Prob}(\text{Satisfait})) =$$

$$0.65 + \begin{matrix}\text{Non}-\text{Blanc}\\ \text{Blanc}\end{matrix}\begin{bmatrix}-.01\\ +.01\end{bmatrix} + \begin{matrix}<35\\ 35-44\\ >44\end{matrix}\begin{bmatrix}-.20\\ -.02\\ +.22\end{bmatrix} + \begin{matrix}\text{Homme}\\ \text{Femme}\end{matrix}\begin{bmatrix}+.12\\ -.12\end{bmatrix} + \begin{matrix}\text{Northeast}\\ \text{Mid}-\text{Atlantic}\\ \text{Southern}\\ \text{Midwest}\\ \text{Northwest}\\ \text{Southwest}\\ \text{Pacific}\end{matrix}\begin{bmatrix}-.22\\ +.22\\ -.04\\ -.13\\ -.09\\ +.07\\ +.19\end{bmatrix}$$

$$+ \begin{matrix}\text{Non}-\text{Blanc}\\ \text{Blanc}\end{matrix}\begin{bmatrix}+.09 & -.09\\ -.09 & +.09\\ \text{Homme} & \text{Femme}\end{bmatrix} + \begin{matrix}<35\\ 35-44\\ >44\end{matrix}\begin{bmatrix}+.08 & -.08\\ -.03 & +.03\\ -.05 & +.05\\ \text{Homme} & \text{Femme}\end{bmatrix}$$

Construction d ’un modèle hiérarchique

```
proc logistic data=job;
class race age sex region/param=effect;
model sat/total= sex region race(sex)
                 age(sex) /scale=none ;
contrast 'Pacific' region -1 -1 -1 -1 -1 -1
                                /estimate=parm;
contrast 'Age>44,Homme' age(sex) -1 -1 0 0
                               /estimate = parm;
contrast 'Age>44,Femme' age(sex) 0 0 -1 -1
                                /estimate=parm;
run;
```


RÉSULTATS

Type III Analysis of Effects

Effect	DF	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
sex	1	14.0597	0.0002
region	6	37.7010	<.0001
race(sex)	2	7.5710	0.0227
age(sex)	4	55.4078	<.0001

RÉSULTATS

Analysis of Maximum Likelihood Estimates

Parameter		DF	Estimate	Standard Error	Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept		1	0.6481	0.0346	350.2297	<.0001
sex	0	1	0.1230	0.0328	14.0597	0.0002
region	0	1	-0.2192	0.0469	21.8470	<.0001
region	1	1	0.2228	0.0820	7.3832	0.0066
region	2	1	-0.0446	0.0527	0.7159	0.3975
region	3	1	-0.1291	0.0462	7.8133	0.0052
region	4	1	-0.0927	0.0472	3.8616	0.0494
region	5	1	0.0704	0.0531	1.7565	0.1851
race(sex)	0 0	1	0.0757	0.0422	3.2230	0.0726
race(sex)	0 1	1	-0.0956	0.0459	4.3244	0.0376
age(sex)	0 0	1	-0.1185	0.0342	11.9881	0.0005
age(sex)	1 0	1	-0.0570	0.0370	2.3683	0.1238
age(sex)	0 1	1	-0.2720	0.0530	26.3735	<.0001
age(sex)	1 1	1	0.0115	0.0652	0.0313	0.8596

Contrast	Estimate	Standard Error	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
Pacific	0.1924	0.0751	6.5729	0.0104
Age>44,Homme	0.1754	0.0367	22.8477	<.0001
Age>44,Femme	0.2605	0.0654	15.8719	<.0001

Utilisation de la Proc Logistic avec l ’option Param=effect

$$\text{Logit}(\text{Prob}(\text{Satisfait})) = 0.65 + \begin{matrix}\text{Homme}\\\text{Femme}\end{matrix}\begin{bmatrix}+.12\\-.12\end{bmatrix} + \begin{matrix}\text{Northeast}\\\text{Mid}-\text{Atlantic}\\\text{Southern}\\\text{Midwest}\\\text{Northwest}\\\text{Southwest}\\\text{Pacific}\end{matrix}\begin{bmatrix}-.22\\+.22\\-.04\\-.13\\-.09\\+.07\\+.19\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\text{ns}\\\\\\\text{ns}\\\end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix}\text{Homme}\\\text{Femme}\end{matrix}\begin{bmatrix}+.08 & -.08\\-.10 & +.10\\\text{Non-blanc} & \text{Blanc}\end{bmatrix} + \begin{matrix}\text{Homme}\\\text{Femme}\end{matrix}\begin{bmatrix}-.12 & -.06^{\text{ns}} & .18\\-.27 & .01^{\text{ns}} & .26\\<35 & 35\text{–}44 & >44\end{bmatrix}$$

Différence entre races par sexe : Race(Sexe)

Différence entre les ages par sexe : Age(Sexe)

Analyse des résidus
données agrégées en s groupes

- n_i = effectif du groupe i, i = 1 à s = 84
- y_i = nombre de succès observé dans le groupe i
- $\hat{\pi}_i$ = probabilité de succès dans le groupe i
- $\hat{y}_i = n_i\hat{\pi}_i$ = nombre de succès attendu dans le groupe i
- Résidu de Pearson :

$$r_i = \frac{y_i - n_i\hat{\pi}_i}{\sqrt{n_i\hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)}}$$

- Résidu déviance :

$$d_i = signe(y_i - \hat{y}_i)\sqrt{2y_i \log(\frac{y_i}{\hat{y}_i}) + 2(n_i - y_i)\log(\frac{n_i - y_i}{n_i - \hat{y}_i})}$$

Analyse des résidus et validation du modèle

```
proc logistic data=job;
class race age sex region/param=effect;
model sat/total=race age sex region
      race*sex age*sex / scale = none ;
output  out = residu
        predicted =predicted
        reschi =reschi   resdev=resdev;
run;

Proc print data=residu;
var sat total propsat predicted reschi resdev;
run;
```


Analyse des résidus : Résultats

Obs	sat	total	propsat	predicted	reschi	resdev
1	288	465	0.61935	0.58848	1.35305	1.35864
2	90	135	0.66667	0.68991	-0.58388	-0.58005
3	226	354	0.63842	0.63003	0.32704	0.32756
4	285	464	0.61422	0.61011	0.18152	0.18164
5	270	450	0.60000	0.61875	-0.81897	-0.81651
6	252	378	0.66667	0.65641	0.41995	0.42097
7	119	177	0.67232	0.68338	-0.31638	-0.31541
8	60	117	0.51282	0.53231	-0.42246	-0.42216
9	19	31	0.61290	0.63909	-0.30364	-0.30214

Validation du modèle

- Le khi-deux de Pearson :

$$Q_P = \sum_{i=1}^{s} r_i^2$$

- La déviance :

$$Q_L = \sum_{i=1}^{s} d_i^2$$

- Si le modèle étudié est exact Q_P et Q_L suivent approximativement une loi du khi-deux à [nb de groupes - nb de paramètres du modèle] degrés de liberté.

Remarques

- Les tests de validation sont valables s'il y a au moins 10 sujets par groupe.
- La déviance Q_L est égale à

$$[-2L(\text{modèle étudié})]-[-2L(\text{modèle saturé})]$$

où le modèle saturé est un modèle reconstituant parfaitement les données.

Résultats

Deviance and Pearson Goodness-of-Fit Statistics

Criterion	DF	Value	Value/DF	Pr > ChiSq
Deviance	70	81.9676	1.1710	0.1552
Pearson	70	79.0760	1.1297	0.2142

Number of events/trials observations: 84

SUR-DISPERSION

Khi-deux de Pearson Q_P et déviance Q_L sont trop forts si :

- **Modèle mal spécifié**
- **Outliers**

Hétérogénéité de chaque groupe

La variable de réponse Y_i = Nb de succès sur le groupe i ne suit plus une loi binomiale :

- **$E(Y_i) = n_i\pi_i$**
- **$V(Y_i) = \phi n_i \pi_i (1 - \pi_i)$**

CALCUL DE ϕ

Dans la Proc LOGISTIC :

- **Option SCALE = Pearson :**

$$\phi = \frac{Q_P}{ddl}$$

- **Option SCALE = Deviance :**

$$\phi = \frac{Q_L}{ddl}$$

Dans la Proc GENMOD :

- **Option PSCALE ou DSCALE**
- **Scale =** **(vrai également dans Proc Logistic)**

$$\sqrt{\phi}$$

SOLUTION LOGISTIC/GENMOD POUR PRENDRE EN COMPTE LA SUR-DISPERSION

Utilisation de la réponse binomiale pour l'estimation des paramètres.

Pour les tests sur les coefficients :

- **Les statistiques de Wald et LRT sont divisées par ϕ.**
- **Les déviances sont divisées par ϕ.**
- **Dans GENMOD, utilisation de la statistique**

$$F = \frac{Dev(\text{Modèle sous } H_0) - Dev(\text{Modèle sous } H_1)}{(ddl_{H_0} - ddl_{H_1}) \times \phi}$$

S'il y a sur-dispersion (Déviance et Khi-deux de Pearson significatifs) les résultats non corrigés sont trop significatifs.

B. LA RÉGRESSION LOGISTIQUE ORDINALE

Exemple : Qualité des vins de Bordeaux

Variables observées sur 34 années (1924 - 1957)

TEMPERATURE : Somme des températures moyennes journalières

SOLEIL : Durée d'insolation

CHALEUR : Nombre de jours de grande chaleur

PLUIE : Hauteur des pluies

QUALITE DU VIN : Bon, Moyen, Médiocre

LES DONNÉES

	Température	Soleil	Chaleur	Pluie	Qualité
1	3064	1201	10	361	2
2	3000	1053	11	338	3
3	3155	1133	19	393	2
4	3085	970	4	467	3
5	3245	1258	36	294	1
6	3267	1386	35	225	1
7	3080	966	13	417	3
8	2974	1189	12	488	3
9	3038	1103	14	677	3
10	3318	1310	29	427	2
11	3317	1362	25	326	1
12	3182	1171	28	326	3
13	2998	1102	9	349	3
14	3221	1424	21	382	1
15	3019	1230	16	275	2
16	3022	1285	9	303	2
17	3094	1329	11	339	2
18	3009	1210	15	536	3
19	3227	1331	21	414	2
20	3308	1366	24	282	1
21	3212	1289	17	302	2
22	3361	1444	25	253	1
23	3061	1175	12	261	2
24	3478	1317	42	259	1
25	3126	1248	11	315	2
26	3458	1508	43	286	1
27	3252	1361	26	346	2
28	3052	1186	14	443	3
29	3270	1399	24	306	1
30	3198	1259	20	367	1
31	2904	1164	6	311	3
32	3247	1277	19	375	1
33	3083	1195	5	441	3
34	3043	1208	14	371	3

CORRÉLATIONS

Correlations

		Température	Soleil	Chaleur	Pluie
Température	Pearson Correlation	1	.712**	.865**	-.410*
	Sig. (2-tailed)	.	.000	.000	.016
	N	34	34	34	34
Soleil	Pearson Correlation	.712**	1	.646**	-.473**
	Sig. (2-tailed)	.000	.	.000	.005
	N	34	34	34	34
Chaleur	Pearson Correlation	.865**	.646**	1	-.401*
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.	.019
	N	34	34	34	34
Pluie	Pearson Correlation	-.410*	-.473**	-.401*	1
	Sig. (2-tailed)	.016	.005	.019	.
	N	34	34	34	34

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

VIF

Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	Température	.211	4.733
	Soleil	.451	2.216
	Chaleur	.248	4.031
	Pluie	.760	1.316

a. Dependent Variable: Qualité

LA RÉGRESSION LOGISTIQUE ORDINALE

La variable Y prend 1,…, m, m+1 valeurs ordonnées.

I. Le modèle à pentes égales

Dans la Proc Logistic :

$$\text{Prob}(Y \le i / x) = \frac{e^{\alpha_i+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_k x_k}}{1+e^{\alpha_i+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_k x_k}}$$

pour i = 1, …, m et avec $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_m$

Dans SPSS :

$$\text{Prob}(Y \le i / x) = \frac{e^{\alpha_i-\theta_1 x_1-\cdots-\theta_k x_k}}{1+e^{\alpha_i-\theta_1 x_1-\cdots-\theta_k x_k}}$$

Les coefficients de régression des x_j de SPSS sont l'opposé de ceux de SAS : $\theta_j = -\beta_j$.

PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

Modèle à pentes égales (proportional odds ratio)

$$\frac{\text{Prob}(Y \le i/x) / \text{Prob}(Y > i/x)}{\text{Prob}(Y \le i/x') / \text{Prob}(Y > i/x')} = \frac{e^{\alpha_i+x\beta}}{e^{\alpha_i+x'\beta}} = e^{(x-x')\beta}$$

est indépendant de i.

Lorsque $\beta_j > 0$, la probabilité des petites valeurs de Y augmente avec X_j.

TEST DU MODÈLE À PENTES ÉGALES DANS SAS

Le modèle général

$$\text{Prob}(Y \le i / x) = \frac{e^{\alpha_i+\beta_{1i} x_1+\cdots+\beta_{ki} x_k}}{1+e^{\alpha_i+\beta_{1i} x_1+\cdots+\beta_{ki} x_k}}$$

pour i = 1,…,m

Test H_0 :

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{1m} \\ \beta_{21} = \beta_{22} = \ldots = \beta_{2m} \\ \vdots \\ \beta_{k1} = \beta_{k2} = \ldots = \beta_{km} \end{array}\right\} \text{k(m-1) contraintes}$$

STATISTIQUE UTILISÉE

$L(\beta)$ = **Log-vraisemblance du modèle général**

$\hat{\beta}_{H_0}$ = **estimation de β pour le modèle à pentes égales**

La statistique

$$\chi^2_{Score} = \left[\frac{\partial L}{\partial \beta}\right]'_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}} \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}\right]^{-1}_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}} \left[\frac{\partial L}{\partial \beta}\right]_{\beta=\hat{\beta}_{H_0}}$$

suit une loi du khi-deux à k(m-1) degrés de liberté sous l'hypothèse H_0.

RÈGLE DE DÉCISION

On rejette l'hypothèse H_0 d'un modèle à pentes égales au risque α de se tromper si

$$\chi^2_{Score} \geq \chi^2_{1-\alpha}[k(m-1)]$$

ou si

$$NS = Prob(\chi^2[m(k-1)] \geq \chi^2_{Score}) \leq \alpha$$

Conseil d'Agresti :

Test plutôt utilisé pour valider H_0 que pour rejeter H_0.

RÉSULTATS SPSS

Test of Parallel Lines[a]

Model	-2 Log Likelihood	Chi-Square	df	Sig.
Null Hypothesis	26.158			
General	22.355	3.803	4	.433

The null hypothesis states that the location parameters (slope coefficients) are the same across response categories.

a. Link function: Logit.

Model Fitting Information

Model	-2 Log Likelihood	Chi-Square	df	Sig.
Intercept Only	74.647			
Final	26.158	48.489	4	.000

Link function: Logit.

Pseudo R-Square

Cox and Snell	.760
Nagelkerke	.855
McFadden	.650

Link function: Logit.

RÉSULTATS SPSS

Modèle complet

Parameter Estimates

		Estimate	Std. Error	Wald	df	Sig.
Threshold	[QUALITE = 1]	-85.50748	34.92140	5.99549	1	.014
	[QUALITE = 2]	-80.54960	33.96555	5.62405	1	.018
Location	TEMPERAT	-.02427	.01277	3.61247	1	.057
	SOLEIL	-.01379	.00850	2.63346	1	.105
	CHALEUR	.08876	.11929	.55364	1	.457
	PLUIE	.02589	.01235	4.39307	1	.036

Link function: Logit.

Modèle sans Chaleur

Parameter Estimates

		Estimate	Std. Error	Wald	df	Sig.
Threshold	[QUALITE = 1]	-67.44675	22.89023	8.68204	1	.003
	[QUALITE = 2]	-62.63810	21.78872	8.26445	1	.004
Location	TEMPERAT	-.01717	.00759	5.11905	1	.024
	SOLEIL	-.01499	.00832	3.24843	1	.071
	PLUIE	.02224	.01046	4.52311	1	.033

Link function: Logit.

PRÉVISION DE LA QUALITÉ DU VIN AVEC LE 2E MODÈLE

Case Summaries[a]

	Qualité	Estimated Cell Probability for Response Category: 1	Estimated Cell Probability for Response Category: 2	Estimated Cell Probability for Response Category: 3	Predicted Response Category
1	Moyen	.01	.48	.51	Médiocre
2	Médiocre	.00	.05	.95	Médiocre
3	Moyen	.01	.44	.56	Médiocre
4	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
5	Bon	.64	.35	.00	Bon
6	Bon	.99	.01	.00	Bon
7	Médiocre	.00	.01	.99	Médiocre
8	Médiocre	.00	.01	.99	Médiocre
9	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
10	Moyen	.42	.57	.01	Moyen
11	Bon	.94	.06	.00	Bon
12	Médiocre	.08	.83	.09	Moyen
13	Médiocre	.00	.08	.92	Médiocre
14	Bon	.67	.33	.00	Bon
15	Moyen	.04	.78	.18	Moyen
16	Moyen	.05	.81	.15	Moyen
17	Moyen	.13	.82	.05	Moyen
18	Médiocre	.00	.01	.99	Médiocre
19	Moyen	.21	.76	.03	Moyen
20	Bon	.97	.03	.00	Bon
21	Moyen	.58	.42	.01	Bon
22	Bon	1.00	.00	.00	Bon
23	Moyen	.04	.81	.15	Moyen
24	Bon	1.00	.00	.00	Bon
25	Moyen	.11	.83	.06	Moyen
26	Bon	1.00	.00	.00	Bon
27	Moyen	.75	.25	.00	Bon
28	Médiocre	.00	.09	.91	Médiocre
29	Bon	.95	.05	.00	Bon
30	Bon	.14	.81	.05	Moyen
31	Médiocre	.00	.09	.90	Médiocre
32	Bon	.29	.69	.02	Moyen
33	Médiocre	.00	.17	.83	Médiocre
34	Médiocre	.00	.36	.63	Médiocre

a. Limited to first 100 cases.

QUALITÉ DE LA PRÉVISION

Qualité * Predicted Response Category Crosstabulation

Count

		Predicted Response Category			
		Bon	Moyen	Médiocre	Total
Qualité	Bon	9	2		11
	Moyen	2	7	2	11
	Médiocre		1	11	12
Total		11	10	13	34

II. LE MODÈLE PARTIELLEMENT À PENTES ÉGALES

Les données de chaque observation sont répétées m fois.

La variable « Type » indique le numéro de la répétition i.

La variable « Réponse » indique si [Y ≤ i] est vrai :

Année	Qualité	Type	Réponse	
1926	2	1	0	(Y=1) faux
1926	2	2	1	(Y≤ 2) vrai
1927	3	1	0	
1927	3	2	0	
1928	1	1	1	
1928	1	2	1	

Pour Type = 1 : Réponse = 1 ⇔ Qualité = 1
Pour Type = 2 : Réponse = 1 ⇔ Qualité ≤ 2

LE MODÈLE COMPLET

$$\Pr ob(\text{Réponse} = 1 / \text{Type}, x) = \frac{e^{\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \beta_1 T + \cdots + \beta_4 P + \beta_5 T_1 \times T + \cdots + \beta_8 T_1 \times P}}{1 + e^{\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \beta_1 T + \cdots + \beta_4 P + \beta_5 T_1 \times T + \cdots + \beta_8 T_1 \times P}}$$

- Pour Type = 1 : Réponse = 1 ⇔ Qualité = 1
- Pour Type = 2 : Réponse = 1 ⇔ Qualité ≤ 2
- D'où : Prob(Réponse = 1/Type = 1, x) = Prob(Qualité = 1/x)

  Prob(Réponse = 1/Type = 2, x) = Prob(Qualité ≤ 2/x)

- T_1 , T_2 = variables indicatrices de la variable Type

LE CODE SAS

```
Proc genmod data=bordeaux2 descending;
      class type annee;
      model reponse = type tempera soleil chaleur pluie
                      type*tempera type*soleil
                      type*chaleur type*pluie
                      /dist=bin link=logit type3 noint;
      repeated subject=annee / type=unstr;
run;
```

RÉSULTATS ÉTAPE 1

The GENMOD Procedure

Criteria For Assessing Goodness Of Fit

Criterion	DF	Value	Value/DF
Deviance	58	22.5317	0.3885
Scaled Deviance	58	22.5317	0.3885
Pearson Chi-Square	58	20.4541	0.3527
Scaled Pearson X2	58	20.4541	0.3527
Log Likelihood		-11.2659	

Algorithm converged.

RÉSULTATS ÉTAPE 1

Analysis Of GEE Parameter Estimates
Empirical Standard Error Estimates

Parameter		Estimate	Standard Error	95% Confidence Limits		Z	Pr > |Z|
Intercept		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
type	1	-68.1364	29.7166	-126.380	-9.8929	-2.29	0.0219
type	2	-251.965	82.1239	-412.925	-91.0055	-3.07	0.0022
tempera		0.0948	0.0330	0.0300	0.1596	2.87	0.0041
soleil		0.0079	0.0107	-0.0130	0.0288	0.74	0.4598
chaleur		-0.8727	0.3574	-1.5732	-0.1722	-2.44	0.0146
pluie		-0.1036	0.0437	-0.1893	-0.0179	-2.37	0.0178
tempera*type	1	-0.0755	0.0358	-0.1458	-0.0053	-2.11	0.0351
tempera*type	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
soleil*type	1	0.0013	0.0144	-0.0270	0.0295	0.09	0.9290
soleil*type	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
chaleur*type	1	0.8799	0.3795	0.1360	1.6238	2.32	0.0204
chaleur*type	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
pluie*type	1	0.0852	0.0460	-0.0050	0.1753	1.85	0.0641
pluie*type	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.

RÉSULTATS

Score Statistics For Type 3 GEE Analysis

Source	DF	Chi-Square	Pr > ChiSq
type	2	7.08	0.0290
tempera	1	4.94	0.0263
soleil	0	.	.
chaleur	2	0.00	0.9995
pluie	2	0.02	0.9881
tempera*type	2	0.04	0.9799
soleil*type	2	0.27	0.8734
chaleur*type	2	0.00	0.9999
pluie*type	2	0.00	1.0000

LE MODÈLE PARTIELLEMENT À PENTES ÉGALES

On élimine progressivement les interactions

non significatives.

On retrouve le modèle à pentes égales si toutes les interactions sont éliminées.

Cette approche permet un test LRT de comparaison entre le modèle complet et le modèle à pentes égales.

RÉSULTAT DES ITÉRATIONS
MODÈLE À PENTES ÉGALES

Criteria For Assessing Goodness Of Fit

Criterion	DF	Value	Value/DF
Deviance	62	26.2408	0.4232
Scaled Deviance	62	26.2408	0.4232
Pearson Chi-Square	62	26.5218	0.4278
Scaled Pearson X2	62	26.5218	0.4278
Log Likelihood		-13.1204	

Algorithm converged.

RÉSULTAT DES ITÉRATIONS
MODÈLE À PENTES ÉGALES

Analysis Of Initial Parameter Estimates

Parameter		DF	Estimate	Standard Error	Wald 95% Confidence Limits		Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept		0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
type	1	1	-86.4800	35.0585	-155.193	-17.7666	6.08	0.0136
type	2	1	-81.5119	34.0447	-148.238	-14.7855	5.73	0.0167
tempera		1	0.0245	0.0127	-0.0004	0.0495	3.70	0.0543
soleil		1	0.0140	0.0085	-0.0026	0.0306	2.73	0.0986
chaleur		1	-0.0922	0.1180	-0.3235	0.1391	0.61	0.4348
pluie		1	-0.0259	0.0123	-0.0500	-0.0019	4.46	0.0347

C. RÉGRESSION LOGISTIQUE MULTINOMIALE

La variable nominale Y prend r valeurs.

Modèle : (***La modalité r sert de référence.***)

$$\text{Prob}(Y = i / x) = \frac{e^{\alpha_i + \beta_{i1}x_1 + \cdots + \beta_{ik}x_k}}{1 + \sum_{i=1}^{r-1} e^{\alpha_i + \beta_{i1}x_1 + \cdots + \beta_{ik}x_k}} \quad , \quad i = 1,\ldots,r-1$$

$$\text{Prob}(Y = r / x) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{r-1} e^{\alpha_i + \beta_{i1}x_1 + \cdots + \beta_{ik}x_k}}$$

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX LE CODE SAS

```
proc catmod data=bordeaux;
direct tempera soleil chaleur pluie;
response logit;
model qualite = tempera soleil chaleur pluie;
run;
```

Test de Wald sur l'influence d'une variable X_j

Le modèle

$$\pi_i(x) = P(Y = i / X = x) = \frac{e^{\beta_{i0}+\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{ik}x_k}}{1+e^{\beta_{i0}+\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{ik}x_k}},\ i = 1,\ldots, r-1$$

Test

$H_0 : \beta_{1j} = \ldots = \beta_{r-1,j} = 0$
H_1 : au moins un $\beta_{ij} \neq 0$

Statistique utilisée

$$\text{Wald} = (\hat{\beta}_{1j},\ldots,\hat{\beta}_{r-1,j}) \left[\text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1j} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{r-1,j} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1j} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{r-1,j} \end{pmatrix}$$

Règle de décision

On rejette

$$H_0 : \beta_{1j} = \ldots = \beta_{r-1,j} = 0$$

au risque α de se tromper si

$$\text{Wald} \geq \chi^2_{1-\alpha}[r-1]$$

ou si

$$NS = \text{Prob}(\chi^2[r-1] \geq \text{Wald}) \leq \alpha$$

Influence des p variables $X_{p+1},\ldots, X_k$

Le modèle

$$\pi_i(x) = P(Y = i / X = x) = \frac{e^{\beta_{i0}+\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{ik}x_k}}{1+e^{\beta_{i0}+\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{ik}x_k}},\ i = 1,\ldots, r-1$$

Test

$H_0 : \beta_{i,p+1} = \ldots = \beta_{ik} = 0,\ i = 1,\ldots, r\text{-}1$
H_1 : au moins un $\beta_{ij} \neq 0$

Statistiques utilisées

1. Λ = [-2L(Modèle simplifié)] - [-2L(Modèle complet)]
2. $$\text{Wald} = (\hat{\beta}_{1,p+1},\ldots,\hat{\beta}_{r-1,k}) \left[\text{Var} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1,p+1} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{r-1,k} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1,p+1} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{r-1,k} \end{pmatrix}$$

Règle de décision

On rejette

$$H_0 : \beta_{1,p+1} = \ldots = \beta_{r-1,k} = 0$$

au risque α de se tromper si

$$\Lambda \text{ ou Wald} \geq \chi^2_{1-\alpha}[p(r-1)]$$

ou si

$$NS = \text{Prob}(\chi^2[p(r-1)] \geq \text{Wald ou } \Lambda) \leq \alpha$$

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Model Fitting Information

Model	-2 Log Likelihood	Chi-Square	df	Sig.
Intercept Only	74.647			
Final	22.227	52.420	8	.000

Pseudo R-Square

Cox and Snell	.786
Nagelkerke	.884
McFadden	.702

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	34.575	12.348	2	.002
TEMPERAT	29.546	7.319	2	.026
SOLEIL	22.870	.642	2	.725
CHALEUR	25.894	3.667	2	.160
PLUIE	31.242	9.015	2	.011

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

Les tests LRT sont plus justes que les tests de Wald : meilleure approximation du niveau de signification.

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Parameter Estimates

Qualité		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Bon	Intercept	-313.557	230.325	1.853	1	.173	
	TEMPERAT	.113	.096	1.375	1	.241	1.120
	SOLEIL	.015	.024	.370	1	.543	1.015
	CHALEUR	-.874	.934	.876	1	.349	.417
	PLUIE	-.122	.104	1.387	1	.239	.885
Moyen	Intercept	-249.604	225.594	1.224	1	.269	
	TEMPERAT	.095	.095	.999	1	.318	1.099
	SOLEIL	.007	.022	.094	1	.759	1.007
	CHALEUR	-.890	.923	.930	1	.335	.411
	PLUIE	-.105	.103	1.040	1	.308	.901

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Pseudo R-Square

Cox and Snell	.782
Nagelkerke	.880
McFadden	.694

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	42.197	19.327	2	.000
TEMPERAT	43.392	20.522	2	.000
CHALEUR	30.419	7.550	2	.023
PLUIE	41.634	18.764	2	.000

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Parameter Estimates

Qualité		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Bon	Intercept	-381.353	190.219	4.019	1	.045	
	TEMPERAT	.145	.074	3.893	1	.048	1.156
	CHALEUR	-1.161	.738	2.478	1	.115	.313
	PLUIE	-.151	.080	3.577	1	.059	.860
Moyen	Intercept	-308.897	186.257	2.750	1	.097	
	TEMPERAT	.121	.072	2.785	1	.095	1.129
	CHALEUR	-1.145	.729	2.471	1	.116	.318
	PLUIE	-.133	.078	2.906	1	.088	.875

PRÉVISION DE LA QUALITÉ DU VIN

Case Summaries[a]

	Qualité	Estimated Cell Probability for Response Category: 1	Estimated Cell Probability for Response Category: 2	Estimated Cell Probability for Response Category: 3	Predicted Response Category
1	Moyen	.01	.88	.10	Moyen
2	Médiocre	.00	.03	.97	Médiocre
3	Moyen	.01	.19	.79	Médiocre
4	Médiocre	.00	.07	.93	Médiocre
5	Bon	.73	.26	.01	Bon
6	Bon	.94	.06	.00	Bon
7	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
8	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
9	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
10	Moyen	.63	.34	.03	Bon
11	Bon	.92	.08	.00	Bon
12	Médiocre	.20	.50	.30	Moyen
13	Médiocre	.00	.04	.96	Médiocre
14	Bon	.30	.69	.00	Moyen
15	Moyen	.02	.77	.21	Moyen
16	Moyen	.02	.98	.00	Moyen
17	Moyen	.05	.95	.00	Moyen
18	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
19	Moyen	.21	.72	.08	Moyen
20	Bon	.95	.05	.00	Bon
21	Moyen	.60	.40	.00	Bon
22	Bon	.99	.01	.00	Bon
23	Moyen	.08	.92	.00	Moyen
24	Bon	1.00	.00	.00	Bon
25	Moyen	.14	.86	.00	Moyen
26	Bon	1.00	.00	.00	Bon
27	Moyen	.62	.38	.00	Bon
28	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
29	Bon	.84	.16	.00	Bon
30	Bon	.25	.75	.00	Moyen
31	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre
32	Bon	.49	.51	.00	Moyen
33	Médiocre	.00	.38	.62	Médiocre
34	Médiocre	.00	.00	1.00	Médiocre

a. Limited to first 100 cases.

APPLICATION AUX VINS DE BORDEAUX

Classification

	Predicted			
Observed	Bon	Moyen	Médiocre	Percent Correct
Bon	8	3	0	72.7%
Moyen	3	7	1	63.6%
Médiocre	0	1	11	91.7%
Overall Percentage	32.4%	32.4%	35.3%	76.5%

EXEMPLE ALLIGATORS (AGRESTI)

Table 1: Primary Food Choice of Alligators, by Lake, Gender, and Size

			Primary Food Choice				
Lake	Gender	Size	Fish	Invertebrate	Reptile	Bird	Other
Hancock	Male	≤2.3	7	1	0	0	5
		>2.3	4	0	0	1	2
	Female	≤2.3	16	3	2	2	3
		>2.3	3	0	1	2	3
Oklawaha	Male	≤2.3	2	2	0	0	1
		>2.3	13	7	6	0	0
	Female	≤2.3	3	9	1	0	2
		>2.3	0	1	0	1	0
Trafford	Male	≤2.3	3	7	1	0	1
		>2.3	8	6	6	3	5
	Female	≤2.3	2	4	1	1	4
		>2.3	0	1	0	0	0
George	Male	≤2.3	13	10	0	2	2
		>2.3	9	0	0	1	2
	Female	≤2.3	3	9	1	0	1
		>2.3	8	1	0	0	1

EXEMPLE ALLIGATORS

The sample consisted of 219 alligators captured in four Florida lakes, during September 1985.

The response variable is the primary food type, in volume, found in an alligator's stomach. This variable had five categories: Fish, Invertebrate, Reptile, Bird, Other.

The invertebrates found in the stomachs were primarily apple snails, aquatic insects, and crayfish.

The reptiles were primarily turtles (though one stomach contained tags of 23 baby alligators that had been released in the lake during the previous year!).

The Other category consisted of amphibian, mammal, plant material, stones or other debris, or no food of dominant type.

EXEMPLE ALLIGATORS

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	146.644[a]	.000	0	.
LAKE	196.962	50.318	12	.000
GENDER	148.859	2.215	4	.696
SIZE	164.244	17.600	4	.001

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

a. This reduced model is equivalent to the final model because omitting the effect does not increase the degrees of freedom.

EXEMPLE ALLIGATORS

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	95.028[a]	.000	0	.
LAKE	144.161	49.133	12	.000
SIZE	116.115	21.087	4	.000

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

a. This reduced model is equivalent to the final model because omitting the effect does not increase the degrees of freedom.

Modèle estimé

Parameter Estimates

CHOICE		B	Std. Error	Wald	df	Sig.	
B	Intercept	-.626	.642	.952	1	.329	
	[LAKE=G]	1.847	1.317	1.967	1	.161	
	[LAKE=H]	1.300	.993	1.712	1	.191	
	[LAKE=O]	-1.265	1.233	1.052	1	.305	
	[LAKE=T]	0[a]	.	.	0	.	
	[SIZE=<=2.3]	-.279	.806	.120	1	.729	
	[SIZE=>2.3]	0[a]	.	.	0	.	
F	Intercept	.379	.479	.626	1	.429	
	[LAKE=G]	2.935	1.116	6.913	1	.009	
	[LAKE=H]	1.692	.780	4.703	1	.030	
	[LAKE=O]	.476	.634	.564	1	.452	
	[LAKE=T]	0[a]	.	.	0	.	
	[SIZE=<=2.3]	.351	.580	.367	1	.545	
	[SIZE=>2.3]	0[a]	.	.	0	.	
I	Intercept	-.048	.505	.009	1	.925	
	[LAKE=G]	1.813	1.127	2.590	1	.108	
	[LAKE=H]	-1.088	.908	1.434	1	.231	
	[LAKE=O]	.292	.641	.207	1	.649	
	[LAKE=T]	0[a]	.	.	0	.	
	[SIZE=<=2.3]	1.809	.603	9.008	1	.003	
	[SIZE=>2.3]	0[a]	.	.	0	.	
O	Intercept	-.009	.522	.000	1	.987	
	[LAKE=G]	1.419	1.189	1.424	1	.233	
	[LAKE=H]	1.002	.830	1.459	1	.227	
	[LAKE=O]	-1.034	.840	1.515	1	.218	
	[LAKE=T]	0[a]	.	.	0	.	
	[SIZE=<=2.3]	.683	.651	1.099	1	.295	
	[SIZE=>2.3]	0[a]	.	.	0	.	.

a. This parameter is set to zero because it is redundant.

Prévision

Case Summaries

	LAKE	SIZE	Estimated Cell Probability for Response Category: B	Estimated Cell Probability for Response Category: F	Estimated Cell Probability for Response Category: I	Estimated Cell Probability for Response Category: O	Estimated Cell Probability for Response Category: R
1	H	<=2.3	.07	.54	.09	.25	.05
2	H	>2.3	.14	.57	.02	.19	.07
3	O	<=2.3	.01	.26	.60	.05	.08
4	O	>2.3	.03	.46	.25	.07	.19
5	T	<=2.3	.04	.18	.52	.17	.09
6	T	>2.3	.11	.30	.19	.20	.20
7	G	<=2.3	.03	.45	.41	.09	.01
8	G	>2.3	.08	.66	.14	.10	.02

H = Hancock, O = Oklawaha, T = Trafford, G = George

Exemple Alligators (2)

SEX	LENGTH	CHOICE	SEX	LENGTH	CHOICE	SEX	LENGTH	CHOICE
M	1.30	I	M	2.03	F	F	1.78	I
M	1.32	F	M	2.03	F	F	1.78	O
M	1.32	F	M	2.31	F	F	1.80	I
M	1.40	F	M	2.36	F	F	1.88	I
M	1.42	I	M	2.46	F	F	2.16	F
M	1.42	F	M	3.25	O	F	2.26	F
M	1.47	I	M	3.28	O	F	2.31	F
M	1.47	F	M	3.33	F	F	2.36	F
M	1.50	I	M	3.56	F	F	2.39	F
M	1.52	I	M	3.58	F	F	2.41	F
M	1.63	I	M	3.66	F	F	2.44	F
M	1.65	O	M	3.68	O	F	2.56	O
M	1.65	O	M	3.71	F	F	2.67	F
M	1.65	I	M	3.89	F	F	2.72	I
M	1.65	F	F	1.24	I	F	2.79	F
M	1.68	F	F	1.30	I	F	2.84	F
M	1.70	I	F	1.45	I			
M	1.73	O	F	1.45	O			
M	1.78	F	F	1.55	I			
M	1.78	O	F	1.60	I			
M	1.80	F	F	1.60	I			
M	1.85	F	F	1.65	F			
M	1.93	I						
M	1.93	F						
M	1.98	I						

Exemple Alligators (2)

The CATMOD Procedure

Maximum likelihood computations converged.

Maximum Likelihood Analysis of Variance

Source	DF	Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept	2	9.84	0.0073
sex	2	2.71	0.2574
length	2	10.28	0.0059
length*sex	2	2.57	0.2767
Likelihood Ratio	94	77.64	0.8890

Exemple Alligators (2)

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	92.270[a]	.000	0	.
LENGTH	110.319	18.049	2	.000
SEX	95.732	3.461	2	.177

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

a. This reduced model is equivalent to the final model because omitting the effect does not increase the degrees of freedom.

Exemple Alligators (2)

Likelihood Ratio Tests

Effect	-2 Log Likelihood of Reduced Model	Chi-Square	df	Sig.
Intercept	104.563	14.247	2	.001
LENGTH	106.681	16.365	2	.000

The chi-square statistic is the difference in -2 log-likelihoods between the final model and a reduced model. The reduced model is formed by omitting an effect from the final model. The null hypothesis is that all parameters of that effect are 0.

Parameter Estimates

CHOICE		B	Std. Error	Wald	df	Sig.
F	Intercept	.998	1.176	.721	1	.396
	LENGTH	.085	.489	.030	1	.862
I	Intercept	5.181	1.746	8.807	1	.003
	LENGTH	-2.388	.921	6.718	1	.010

Exemple Alligators (2)

$$\text{Prob(F)} = \frac{e^{.998+.085\text{Length}}}{1+e^{.998+.085\text{Length}}+e^{5.181-2.388\text{Length}}}$$

$$\text{Prob(I)} = \frac{e^{5.181-2.388\text{Length}}}{1+e^{.998+.085\text{Length}}+e^{5.181-2.388\text{Length}}}$$

$$\text{Prob(0)} = \frac{1}{1+e^{.998+.085\text{Length}}+e^{5.181-2.388\text{Length}}}$$

Exemple Alligators (2)