Feuille de Travaux Dirigés n$^{\text{o}}$ 6
Intervalles de confiance
Corrigé

Exercice VI.1. Les billes métalliques

1. Nous calculons la moyenne $\widehat{\mu}$ de l'échantillon :
$$\widehat{\mu} = 20.$$
Calculons la variance corrigée puis l'écart-type corrigé de l'échantillon à partir de la moyenne de l'échantillon :
$$s_c^2 = \frac{10}{9}\left(\frac{19,6^2 + 20^2 + \cdots + 19,8^2}{10} - 20^2\right) = 0,04,$$
puis
$$s_c = \sqrt{0,04} = 0,2.$$
Dans la table de la loi de Student, pour 9 ddl, ou encore en utilisant le logiciel `R`, nous trouvons
$$\mathbb{P}[|T| > 2,26] = 0,05 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[|T| < 2,26] = 0,95.$$
Remarque : En fait, avec le logiciel `R`, nous trouvons exactement $2,262157$ que nous arrondissons à $2,26$.
L'intervalle de confiance pour le poids moyen est donc :
$$\left[20 - 2,26 \times \frac{0,2}{\sqrt{10}}; 20 + 2,26 \times \frac{0,2}{\sqrt{10}}\right]$$
$$\simeq [19,86; 20,14].$$
2. Si l'écart-type de la population est connu, nous utilisons alors la table de la loi normale centrée et réduite :
$$\mathbb{P}[|U| > 1,96] = 0,05 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[|U| < 1,96] = 0,95.$$
Remarque : En fait, avec le logiciel `R`, nous trouvons exactement $1,959964$ que nous arrondissons à $1,96$.
L'intervalle de confiance pour le poids moyen est donc :
$$\left[20 - 1,96 \times \frac{0,2}{\sqrt{10}}; 20 + 1,96 \times \frac{0,2}{\sqrt{10}}\right]$$
$$\simeq [19,88; 20,12].$$

Exercice VI.2. La moyenne des notes

1. L'intervalle de confiance de la moyenne des 200 copies est :
$$\left[11 - 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{7}}; 11 + 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{7}}\right]$$
$$\simeq [9,52; 12,48].$$

2. Si l'amplitude de l'intervalle de confiance est égale à 2, nous devons avoir :
$$1,96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 1,$$
ce qui donne
$$n \simeq 15,4.$$
En corrigeant 16 copies, l'enseignant peut situer la moyenne de ses étudiants.
3. Il faut que l'intervalle de confiance à 99% soit égal à $[10;12]$. Nous devons donc avoir :
$$2,576 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 1,$$
ce qui donne
$$n \simeq 26,5.$$
Remarque : La valeur $2,576$ est le quantile d'une loi normale centrée et réduite à 99%. Le logiciel `R` donne la valeur $2,575829$ que nous arrondissons à $2,575$.
Si l'enseignant corrige 27 copies et qu'il trouve une moyenne égale à 11, il peut dire que la moyenne de ses étudiants est supérieure à 10, avec un risque d'erreur de 1%.

Exercice VI.3. Les composants électroniques

1. La moyenne μ de la population est estimée par la moyenne de l'échantillon
$$\widehat{\mu} = \frac{60\,000}{50} = 1\,200.$$
2. L'écart-type σ de la population est estimé à partir de l'écart-type s_c de l'échantillon :
$$s^2 = \frac{74 \times 10^6}{50} - 1\,200^2 = 40\,000.$$
$$s_c^2 = s^2 \times \frac{50}{49} = 40\,816.$$
D'où, nous obtenons
$$s_c \simeq 202.$$
3. La variance de la population étant estimée, nous utilisons la table de la loi de Student.
Nous trouvons dans la table pour 49 ddl ou encore en utilisant le logiciel `R` :
$$\mathbb{P}[|T| > 2,01] = 0,05 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[|T| < 2,01] = 0,95.$$
Remarque : Le logiciel `R` donne la valeur $2,009575$ que nous arrondissons à $2,01$.
L'intervalle de confiance à 95% de la moyenne est :
$$\left[1200 - 2,01 \times \frac{202}{\sqrt{50}}; 1200 + 2,01 \times \frac{202}{\sqrt{50}}\right]$$
$$\simeq [1\,143; 1\,257].$$

Nous trouvons dans la table pour 49 ddl ou encore en utilisant le logiciel `R` :

$$\mathbb{P}[|T| > 2,68] = 0,01 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}[|T| < 2,68] = 0,99.$$

Remarque : En fait, avec le logiciel `R`, nous trouvons la valeur $2,679952$ que nous arrondissons à $2,68$. L'intervalle de confiance à 99% de la moyenne est :

$$\left[1200 - 2,68 \times \frac{202}{\sqrt{50}}; 1200 + 2,68 \times \frac{202}{\sqrt{50}}\right]$$
$$\simeq [1\,123; 1\,277].$$

4. Puisque nous souhaitons avoir une amplitude de 60 heures, la taille de l'échantillon est nécessairement supérieure à 50 et nous sommes dans les conditions d'utilisation de la loi normale.
   Nous devons avoir :
$$1,96 \times \frac{202}{\sqrt{n}} = 30$$
   ce qui donne
$$n \simeq 175.$$

Exercice VI.4. Un sondages politique

1. Avec 1 000 personnes, nous pouvons déterminer un intervalle de confiance.
   L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Dupont est :
$$\left[0,5 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{1000}}; 0,5 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{1000}}\right]$$
$$\simeq [0,469; 0,531].$$
   L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Durand est :
$$\left[0,25 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{1000}}; 0,25 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{1000}}\right]$$
$$\simeq [0,223; 0,277].$$
   L'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Duroc est :
$$\left[0,05 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{1000}}; 0,05 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{1000}}\right]$$
$$\simeq [0,036; 0,064].$$
   L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Dupont est :
$$\left[0,5 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{1000}}; 0,5 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{1000}}\right]$$
$$\simeq [0,459; 0,541].$$

L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Durand est :

$$\left[0,25 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{1000}} ; 0,25 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{1000}}\right]$$

$$\simeq [0,215; 0,285].$$

L'intervalle de confiance à 99% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour Monsieur Duroc est :

$$\left[0,05 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{1000}} ; 0,05 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{1000}}\right]$$

$$\simeq [0,032; 0,068].$$

2. Pour un échantillon de taille n (nous supposons $n > 1\,000$), l'intervalle de confiance à 95% du pourcentage de personness ayant l'intention de voter Duval est

$$\left[0,17 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,17 \times 0,83}{n}} ; 0,17 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,17 \times 0,83}{n}}\right].$$

Puisque nous souhaitons une précision de 1%, cet intervalle de confiance doit être l'intervalle $[0,16; 0,18]$.

Et nous devons avoir

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,17 \times 0,83}{n}} = 0,01$$

ce qui donne

$$n \simeq 5\,420.$$