

# Feuille de Travaux Dirigés n° 8

## Tests de comparaison de moyennes

### Correction

#### Exercice VIII.1. Gaz nocif.

1. a. Lorsque nous nous intéressons au changement d'une statistique  $\mu$  dans une seule direction, nous optons pour un test *unilatéral*.  
Les deux hypothèses sont les suivantes si nous nous intéressons à un changement du côté droit :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad (\leq) \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.$$

#### Il s'agit d'un test unilatéral à droite.

Comme l'écart-type de la population est connu,  $\sigma = 10$ , nous utilisons la loi normale.

La zone de rejet est  $[1,64; +\infty]$  puisque  $\mathbb{P}[Z > 1,64] = 0,95$ .

La valeur de la réalisation de la statistique du test est

$$\sqrt{n} \times \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma}.$$

Ici l'application numérique donne

$$\sqrt{10} \times \frac{48 - 50}{10} \simeq -0,63 < 1,64.$$

Le test n'est donc pas significatif au seuil  $\alpha = 5\%$ .

Nous concluons, avec un risque de 5%, que la moyenne  $\mu$  est inférieure ou égale à 50.

- b. Au risque de  $\alpha = 1\%$ , la zone de rejet devient  $[2,33; +\infty]$  puisque  $\mathbb{P}[Z > 2,33] = 0,99$ .

Comme  $-0,63 < 2,33$ , le test n'est donc pas non plus significatif au seuil  $\alpha = 1\%$ .

Nous concluons, avec un risque de 1%, que la moyenne  $\mu$  est inférieure ou égale à 50.

Au risque de  $\alpha = 10\%$ , la zone de rejet devient  $[1,28; +\infty]$  puisque  $\mathbb{P}[Z > 1,28] = 0,90$ .

Comme  $-0,63 < 1,28$ , le test n'est donc pas non plus significatif au seuil  $\alpha = 10\%$ .

Nous concluons, avec un risque de 10%, que la moyenne  $\mu$  est inférieure ou égale à 50.

2. Lorsque nous nous intéressons au changement d'une statistique  $\mu$  dans une seule direction, nous optons pour un test *unilatéral*.  
Les deux hypothèses sont les suivantes si nous nous intéressons à un changement du côté droit :

$$\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad (\leq) \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0.$$

**Il s'agit d'un test unilatéral à droite.**

Comme l'écart-type  $\sigma$  de la population est inconnu nous utilisons la loi de Student à  $200-1=199$  degrés de liberté.

La zone de rejet est  $[1,65; +\infty]$  puisque  $\mathbb{P}[T > 1,65] = 0,95$ .

La valeur de la réalisation de la statistique du test est

$$\sqrt{n} \times \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{s_c}.$$

Ici l'application numérique donne

$$\sqrt{200} \times \frac{51 - 50}{10} \simeq 1,41 < 1,64.$$

Le test n'est donc pas significatif au seuil  $\alpha = 5\%$ .

Nous concluons, avec un risque de 5%, que la moyenne  $\mu$  est inférieure ou égale à 50.

**Exercice VIII.2. Pisciculture.**

Calculons la moyenne et l'écart-type de la longueur des poissons des deux échantillons A et B.

$$\hat{\mu}_A = \frac{3780}{180} = 21,0 \quad s_A^2 = \frac{80000}{180} - 21,0^2 = 3,44 \quad s_{c_A}^2 = \frac{180}{179} \left( \frac{80000}{180} - 21,0^2 \right) = 3,46$$

$$\hat{\mu}_B = \frac{2140}{100} = 21,4 \quad s_B^2 = \frac{46000}{100} - 21,4^2 = 2,04 \quad s_{c_A}^2 = \frac{100}{99} \left( \frac{46000}{100} - 21,4^2 \right) = 2,06.$$

Détaillons la règle de décision du test de l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \mu_A = \mu_B \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \mu_A \neq \mu_B.$$

Nous remarquons qu'il s'agit ici d'un test *bilatéral*.

Nous considérons la statistique suivante :

$$z = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{s_{c_A}^2}{n_A} + \frac{s_{c_B}^2}{n_B}}} \quad (z \simeq -2,00).$$

Si l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  est vraie, alors  $z$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $Z$  dont la loi est sensiblement la loi normale centrée et réduite :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{H}_0}(Z) \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Pour un niveau fixé  $\alpha = 5\%$ , les tables de la loi normale centrée et réduite nous fournissent une valeur critique  $c_{\alpha/2} = 1,96$  telle que  $\mathbb{P}[-c_{\alpha/2} \leq Z \leq c_{\alpha/2}] = 1 - \alpha = 0,95$ .

Alors nous décidons :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 \text{ est vraie} & \text{si } z \leq -c_{\alpha/2} \text{ ou } c_{\alpha/2} \leq z & (-2,00 \leq -1,96 \text{ ou } 1,96 \leq -2,00) \\ \mathcal{H}_0 \text{ est vraie} & \text{si } -c_{\alpha/2} < z < c_{\alpha/2} & (-1,96 < -2,00 < 1,96). \end{cases}$$

La condition  $[-2,00 \leq -1,96$  ou  $1,96 \leq -2,00]$  est donc remplie puisque  $-2,00 \leq -1,96$ . Il en résulte que le test est significatif au seuil  $\alpha = 5\%$ . Nous rejetons donc l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  au niveau  $\alpha = 5\%$  et nous décidons d'accepter l'hypothèse alternative  $\mathcal{H}_1$ . Ainsi, une différence de régime alimentaire affecte significativement la croissance des poissons au seuil  $\alpha = 5\%$ .