LES TESTS D'HYPOTHÈSES

D'après le chapitre 7 du livre *Probabilités, Statistique et techniques de régression*, Gérald Baillargeon, Les éditions SMG

1. Principe d'un test d'hypothèse

On s'intéresse à une population dont les éléments qui constituent cette population possèdent un caractère mesurable ou dénombrable.
Exemple : moyenne, variance, proportion,...
Malheureusement pour nous, **la valeur du paramètre**, relative au caractère qui nous intéresse et que nous étudions est **inconnue**.

Que fait-on en pratique ?

On "formule" une hypothèse sur la valeur du paramètre soit :
- par considérations théoriques,
- par considérations pratiques,
- par un "pressentiment".

Il va falloir porter un jugement sur cette hypothèse. On a un échantillon à notre disposition pour pouvoir juger cette hypothèse. **Cet échantillon va nous servir de base pour notre décision finale.**

Il est évident que la statistique servant d'estimation au paramètre de la population que nous étudions ne prendra pas une valeur rigoureusement égale à la valeur théorique proposée dans l'hypothèse. La statistique que nous étudions comporte des **fluctuations d'échantillonage qui sont régies par des distributions connues**.

Pour décider si l'hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut alors élaborer une méthode qui nous permet de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue de l'échantillon et celle du paramètre spécifiée dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage.

La construction d'un test d'hypothèse consiste à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique obtenue de l'échantillon, en supposant l'hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l'échantillonnage.

2. Quelques définitions importantes dans l'élaboration d'un test d'hypothèse

Définissons certains concepts.

• **Une hypothèse statistique** est un énoncé (une affirmation) concernant les caractéristiques (exemples : valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations...) d'une population.

• **Un test d'hypothèse** est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillon, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques.

• **Hypothèse nulle (H_0) et hypothèse alternative (H_1)** : l'hypothèse selon laquelle on fixe a priori un paramètre de la population (exemples : moyenne, écart-type, proportion,...) à une valeur particulière s'appelle l'hypothèse nulle et est notée (H_0). N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse nulle (H_0) s'appelle l'hypothèse alternative et est notée (H_1).

3. Elaboration de la règle de décision

Un des aspects importants d'un test d'hypothèse est de convenir d'avance à quelle condition l'une ou l'autre des hypothèses sera considérée comme vraisemblable.

C'est l'hypothèse nulle (H_0) qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie. Si le test conduit au rejet de l'hypothèse nulle, nous considérons alors l'hypothèse alternative (H_1) comme vraisemblable plutôt que l'hypothèse nulle (H_0).

Pour établir la crédibilité de l'hypothèse nulle (H_0), il faut être en mesure d'élaborer des règles de décision qui vont conduire sans équivoque au non-rejet de l'hypothèse nulle (H_0), ou au rejet de l'hypothèse nulle (H_0). Toutefois la décision de favoriser l'hypothèse nulle (H_0) ou l'hypothèse alternative (H_1) est basée sur une information partielle, les résultats d'un échantillon. Il est statistiquement impossible de prendre toujours la bonne décision.

En pratique, on met en oeuvre une démarche qui permet, à long terme, de rejetter à tort une hypothèse nulle (H_0) vraie dans une faible proportion de cas. La conclusion qui est déduite des résultats de l'échantillon suivant la règle de décision adoptée, a un caractère probabiliste. **On prend une décision qu'en prenant conscience qu'il y a un certain risque qu'elle soit erronée.** Ce risque est donné par le seuil de signification du test.

Seuil de signification d'un test d'hypothèse : le risque consenti à l'avance et qui est générallement noté α, de rejeter à tort l'hypothše nulle (H_0) alors qu'elle est vraie (et de favoriser alors l'hypothèse alternative (H_1)) s'appelle le **seuil de signification** du test et s'énonce en probabilité comme suit :

$$\alpha = \mathbb{P}\left[\text{ rejeter } (H_0)|(H_0) \text{ vraie }\right] = \mathbb{P}\left[\text{choisir } (H_0)|(H_1) \text{ vraie }\right].$$

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique une **région de rejet** de l'hypothèse nulle (H_0) (appelée également **région critique**). **L'aire de cette région correspond à la probabilité** α. Cette région de rejet de l'hypothèse nulle (H_0) est constituée d'un ensemble de valeurs de la statistique qui conduiront au rejet de l'hypothèse nulle (H_0).

Par exemple, on prend comme seuil de signification $\alpha = 5\%$, cela signifie que l'on admet d'avance que la statistique peut prendre, dans 5% des cas, une valeur se situant dans la région de rejet de (H_0), bien que l'hypothèse (H_0) soit vraie et ceci uniquement d'après le hasard de l'échantillonnage.

Sur la distribution d'échantillonnage correspond aussi une région complémentaire, dite **région de non-rejet** de l'hypothèse nulle (H_0) (appelée également **région d'acceptation**) de probabilité $1 - \alpha$.

La valeur observée de la statistique déduite des résultats de l'échantillon appartient, soit à la région de rejet de l'hypothèse nulle (H_0), soit à la région de non-rejet de l'hypothèse nulle (H_0).

4. Formulation des hypothèses (H_0) et (H_1) et type de test

4.1. Test bilatéral

Lorsqu'on s'intéresse au changement d'une statistique θ dans l'une ou l'autre des directions (soit $\theta > \theta_0$ ou $\theta < \theta_0$), on opte pour un **test bilatéral**. Les hypothèses (H_0) et (H_1) sont alors :

$$(H_0) : \theta = \theta_0$$

contre

$$(H_1) : \theta \neq \theta_0.$$

On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de l'hypothèse (H_0) comme suit :

$\theta < \theta_0$	$\theta = \theta_0$	$\theta > \theta_0$
Région de rejet de (H_0)	Région de non-rejet de (H_0)	Région de rejet de (H_0)

4.2. Test unilatéral

Lorsqu'on s'intéresse au changement d'une statistique θ dans une seule direction, on opte pour un test unilatéral. Les hypothèses sont les suivantes si l'on s'intéresse à un changement du côté gauche :

$$(H_0) : \theta = \theta_0 \quad (\geq)$$

contre

$$(H_1) : \theta < \theta_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à gauche. On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de l'hypothèse nulle (H_0) comme suit :

$\theta < \theta_0$	$\theta \geq \theta_0$
Région de rejet de (H_0)	Région de non-rejet de (H_0)

Les hypothèses peuvent aussi s'énoncer comme suit si l'on s'intéresse à un changement dans l'autre direction, c'est-à-dire du côté droit :

$$(H_0) : \theta = \theta_0 \quad (\leq)$$

contre

$$(H_1) : \theta > \theta_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite. On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de l'hypothèse nulle (H_0) comme suit :

$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$
Région de non-rejet de (H_0)	Région de rejet de (H_0)

5. Puissance d'un test

On peut éventuellement compléter la procédure en déterminant la **puissance** du test représentée par la *p*robabilité de rejeter l'hypothèse nulle (H_0). Cela ne peut se faire que si l'on considère des valeurs particulières de la statistique θ.

Pour ce dernier point, nous conseillons la relecture du cours de L3 qui est mis sur ce même site et en particulier le paragraphe du chapitre 1 intitulé **puissance d'un test**.