LES TESTS D'HYPOTHÈSE

Myriam Bertrand

1. Principe d'un test d'hypothèse

Soit une population dont les éléments possèdent un caractère (mesurable ou dénombrable) (par exemple moyenne, proportion,...) et dont **la valeur du paramètre**, relative au caractère étudié est **inconnue**.

Que fait-on en pratique ?

On "formule" une hypothèse sur la valeur du paramètre soit :
– par considérations théoriques
– par considérations pratiques
– par un "pressentiment".

Il va falloir porter un jugement sur cette hypothèse. On a un échantillon à notre disposition pour pouvoir juger cette hypothèse. **Cet échantillon nous sert de base.**

Il est évident que la statistique (variable d'échantillonnage) servant d'estimation au paramètre de la population ne prendra pas une valeur rigoureusement égale à la valeur théorique proposée dans l'hypothèse. Elle comporte des **fluctuations d'échantillonage qui sont régies par des distributions connues**.

Pour décider si l'hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permet de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue de l'échantillon et celle du paramètre spcifiée dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage.

La construction d'un test d'hypothèse consiste à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique, en supposant l'hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l'échantillonnage.

2. Concepts importants dans l'élaboration d'un test d'hypothèse

Définissons certains concepts.

Une hypothèse statistique est un énoncé (une affirmation) concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations) d'une population.

Un test d'hypothèse (ou test d'hypothèse) est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillon, de faire un choix entre 2 hypothèses statistiques.

Hypothèse nulle ($\mathbf{H_0}$) et hypothèse alternative ($\mathbf{H_1}$) : l'hypothèse selon laquelle on fixe a priori un paramètre de la population à une valeur particulière s'appelle l'hypothèse nulle et est notée H_0. N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse H_0 s'appele l'hypothèse alternative et est notée H_1.

Un des aspects importants d'un test d'hypothèse est de convenir d'avance à quelle condition l'une ou l'autre deshypothèse sera considérée comme vraisemblable.

C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie. Si le test conduit au rejet de l'hypothèse nulle, nous considérons alors l'hypothèse alternative H_1 comme vraisemblable plutôt que H_0.

Pour établir la crédibilité de l'hypothèse nulle, il faut être en mesure d'établir des règles de décision qui vont conduire sans équivoque au non-rejet de H_0 (ou au rejet). Toutefois la décision de favoriser l'hypothèse nulle ou l'hypothèse alternative est basée sur une information partielle, les résultats d'un échantillon. Il est statistiquement impossible de prendre toujours la bonne décision.

En pratique, on met en oeuvre une démarche qui permet, à long terme, de rejetter à tort une hypothèse nulle vraie dans une faible proportion de cas. La conclusion qui est déduite des résultats de l'échantillon suivant la règle de décision adoptée, a un caractère probabiliste. **On prend une décision qu'en prenant conscience qu'il y a un certain risque qu'elle soit erronée.** Ce risque est donné par le seuil de signification du test.

Seuil de signification d'un test d'hypothèse : le risque consenti à l'avance et que nous notons α, de rejeter à tort l'hypothse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (et de favoriser alors l'hypothèse alternative H_1) s'appelle le **seuil de signification** du test et s'énonce en probabilité comme suit :

$$\alpha = \mathbb{P}[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{vraie}] = \mathbb{P}[\text{choisir } H_0 | H_1 \text{vraie}].$$

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique une **région de rejet** de l'hypothèse nulle (appelée également **région critique**). **L'aire de cette région correspond à la probabilité** α. Cette région de rejet de H_0 est constituée d'un ensemble de valeurs de la statistique qui conduiront au rejet de H_0.

Par exemple, on prend comme seuil de signification $\alpha = 5\%$, cela signifie que l'on admet d'avance que la statistique peut prendre, dans 5% des cas, une valeur se situant dans la région de rejet de H_0, bien que l'hypothèse H_0 soit vraie et ceci uniquement d'après le hasard de l'échantillonnage.

Sur la distribution d'échantillonnage correspond aussi une région complémentaire, dite **région de non-rejet** de H_0 (appelée également **région d'acceptation**) de probabilité $1 - \alpha$.

La valeur observée de la statistique déduite des résultats de l'échantillon appartient, soit à la région de rejet de H_0, soit à la région de non-rejet de H_0.

3. Formulation des hypothèses H_0 et H_1 et type de test

3.1. Test bilatéral

Lorsqu'on s'intéresse au changement d'une statistique μ dans l'une ou l'autre des directions (soit $\mu > \mu_0$ ou $\mu < \mu_0$), on opte pour un test bilatéral. Les hypothèses H_0 et H_1 sont alors :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contre

$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de H_0 comme suit :

$\mu < \mu_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Région de rejet de H_0	Région de non-rejet de H_0	Région de rejet de H_0

3.2. Test unilatéral

Lorsqu'on s'intéresse au changement d'une statistique μ dans une seule direction, on opte pour un test unilatéral. Les hypothèses sont les suivantes si l'on s'intéresse à un changement du côté gauche :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\geq)$$

contre

$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à gauche. On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de H_0 comme suit :

$\mu < \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$
Région de rejet de H_0	Région de non-rejet de H_0

Les hypothèses peuvent aussi s'énoncer comme suit si l'on s'intéresse à un changement dans l'autre direction (côté droit) :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\leq)$$

contre

$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

Il s'agit d'un test unilatéral à droite. On peut schématiser les régions de rejet et de non-rejet de H_0 comme suit :

$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Région de non-rejet de H_0	Région de rejet de H_0